

# 7. La jacobienne de C

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Comme avant, dans le cas  $(\beta, \gamma) = (0, 3)$  :  $z \equiv \pm 8$  et  $g \equiv 2^4 \cdot (\pm 1) \equiv \pm 5 \not\equiv 9 \cdot 8^4 \equiv 3 \pmod{11}$ . Et dans le cas  $(\beta, \gamma) = (2, 0)$  :  $z \equiv \pm 1$  et  $g \equiv 2^2 \cdot (\pm 1) \not\equiv 9 \pmod{11}$ .  $\square$

## 7. LA JACOBIENNE DE $C$

Il est certainement intéressant de connaître la jacobienne associée à la courbe. Nous allons construire une application birationnelle

$$\vartheta: C \dashrightarrow \text{Jac}(C) = E$$

définie sur  $\mathbf{Q}(\omega)$  à l'aide d'une transformation de Cremona de degré 3 du plan.

L'image de la conique  $B$  par l'application  $j$  est la droite

$$b = \overline{j(B)} = \{x_0 = x_1 = x_2 = 0\} \subset S \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^4.$$

Prenons le point  $R = (0 : 0 : 0 : 1 : \omega) \in b(\mathbf{Q}(\omega))$  et calculons le plan tangent à  $S$  en  $R$  :

$$T_R S = T_R \mathcal{Q}_0 \cap T_R \mathcal{Q}_1 : \{-\omega x_0 + x_1 = 0, \quad \omega x_1 - x_2 = 0\}.$$

L'intersection de  $S$  avec  $T_R S$  se décompose en deux droites  $b$  et  $e_1$ , où la seconde, qui correspond au diviseur exceptionnel de  $j$  au-dessus du point  $P_1$ , est décrite par les équations suivantes :

$$x_1 - \omega x_0 = 0, \quad x_2 - \omega x_1 = 0, \quad x_4 - \omega x_3 - (g_1 + g_3 \omega^2 + \omega^4) x_0 = 0.$$

A ces trois équations correspondent trois cubiques du plan, passant par les points  $P_i$  et ayant un point double en  $P_1$  :

$$\begin{aligned} A'_0: (y - \omega x)(xz - y^2) &= 0, & A'_1: (z - \omega y)(xz - y^2) &= 0, \\ A'_2: -g_0 \omega x^3 + (g_0 - g_1 \omega) x^2 y &+ (-g_2 \omega - g_3 \omega^2 - \omega^4) x^2 z \\ &+ (g_1 + g_3 \omega^2 + \omega^4) x y^2 + (g_2 - g_3 \omega) x y z \\ &+ (g_3 - g_4 \omega) x z^2 + (g_4 - \omega) y z^2 + z^3 &= 0. \end{aligned}$$

Les trois cubiques  $\{A'_0, A'_1, A'_2\}$  constituent une base du système linéaire de telles cubiques définies sur  $\mathbf{Q}(\omega)$ . On peut constater que l'application associée  $\vartheta': \mathbf{P}_{\mathbf{Q}(\omega)}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Q}(\omega)}^2$  est birationnelle car deux telles cubiques n'ont qu'un point d'intersection hors des points  $P_i$ . Elle contracte les quatre droites  $P_1 P_j$  en des points  $Q_j \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}(\omega))$  et elle contracte la conique  $B$  en un point  $Q_1 = (0 : 0 : 1)$ . D'autre part, elle éclate les points  $P_i$ . Le diviseur

exceptionnel au-dessus de  $P_1$  est la conique  $B'$  définie par les  $Q_i$  et les diviseurs exceptionnels au-dessus des autres points  $P_j$  sont des droites.

Sous cette transformation  $\vartheta'$ , la quintique  $C$  se simplifie en une cubique lisse  $E'/\mathbf{Q}(\omega)$  passant par les quatre points  $Q_j$  pour  $1 < j \leq 5$ , d'équation du style

$$0 = (-5632 + 8448\omega + 640\omega^2 + 5184\omega^4)x^3 + \dots + 1024z^3.$$

En reliant les deux autres intersections de  $E'$  avec  $B'$ , on trouve un point  $T$  de  $E'$  défini sur  $\mathbf{Q}(\omega)$  qui peut servir pour transformer  $E'$  en une forme de Weierstrass  $E$  (voir [Ca]), sans être obligé de monter dans un corps encore plus grand. Là, le miracle prédit par la théorie:  $E$  est définie sur  $\mathbf{Q}$  (puisque'elle est la jacobienne de  $C$ , une courbe définie sur  $\mathbf{Q}$ ). Sans donner les détails du calcul, je présente les résultats: l'invariant

$$j = \frac{3443566663693729}{1289106508910} = \frac{151009^3}{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 421 \cdot 27836461} = 2671, 2817 \dots,$$

la forme canonique

$$Y^2 = X^3 + AX + B$$

avec

$$A = -452233232961724703800443015164268$$

$$B = -2199645470636900013045431798249893889294605994928,$$

la forme minimale globale de  $E$

$$Y^2 = X^3 + X^2 + a_4 X + a_6$$

avec

$$a_4 = -5583126332860798812351148335361$$

$$a_6 = -3017346324604802976330769113064479136657958145$$

et le conducteur arithmétique

$$N = 1143864722620401428256678161374838265280$$

$$= 2^6 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 37^2 \cdot 421 \cdot 72497^2 \cdot 151009^2 \cdot 27836461.$$

Grâce à quelques réductions, on montre que le groupe de torsion de  $E(\mathbf{Q})$  est trivial. Par construction,  $(C, \vartheta)$  représente un élément d'ordre 5 du groupe de Tate-Shafarevich  $\text{III}(E/\mathbf{Q})$ . Si ce groupe est fini, son ordre est divisible par 25.

REMERCIEMENTS. Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Sylvia Guibert, à Christian Liedtke, aux frères Bartholdi et surtout aux professeurs Dino Lorenzini et Daniel Coray.

Les calculs monstrueux avec des milliers de polynômes ont été faits par *Mathematica*<sup>®</sup> et *PARI-GP*<sup>®</sup>.

### RÉFÉRENCES

- [Be] BEAUVILLE, A. *Surfaces algébriques complexes*. Astérisque 54, 1978.
- [Ca] CASSELS, J. W. S. *Lectures on Elliptic Curves*. Cambridge Univ. Press, 1991.
- [CF] CASSELS, J. W. S. et A. FRÖHLICH. *Algebraic Number Theory*. Academic Press, London, 1967.
- [CCS] COLLIOT-THÉLÈNE, J.-L., D. CORAY et J.-J. SANSUC. Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles. *J. reine angew. Math.* 320 (1980), 150–191.
- [CP] COLLIOT-THÉLÈNE, J.-L. et B. POONEN. Algebraic families of nonzero elements of the Shafarevich-Tate group. *J. Amer. Math. Soc.* 13 (2000), 83–99.
- [Co] CORAY, D.F. Arithmetic on Cubic Surfaces. PhD thesis. University of Cambridge, 1974.
- [Fi] FISHER, T. A. On 5 and 7 Descents for Elliptic Curves. PhD thesis. University of Cambridge, 2000.
- [Fu] FUJIWARA, M. Hasse principle in algebraic equations. *Acta Arith.* 22 (1972/73), 267–276.
- [Li] LIND, C.-E. Untersuchungen über die rationalen Punkte der ebenen kubischen Kurven vom Geschlecht Eins. PhD thesis. University of Uppsala, 1940.
- [Re] REICHARDT, H. Einige im Kleinen überall lösbar, im Großen unlösbar diophantische Gleichungen. *J. reine angew. Math.* 184 (1942), 12–18.
- [Se] SELMER, E. The diophantine equation  $aX^3 + bY^3 + cZ^3 = 0$ . *Acta Math.* 85 (1951), 203–362.

(Reçu le 22 janvier 2001)

Christian Wuthrich

Section de Mathématiques

Case postale 240

CH-1211 Genève 24

Suisse

*e-mail*: christian.wuthrich@math.unige.ch