

## 2.1 Characteristic classes and representations

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 2. SYMPLECTIC CHARACTERISTIC CLASSES

## 2.1 CHARACTERISTIC CLASSES AND REPRESENTATIONS

The previously defined homomorphism  $\phi: U(n) \rightarrow \mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$  induces

$$H^*(B \mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R}), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} H^*(B U(n), \mathbf{Z})$$

such that for  $j = 1, \dots, n$  the symplectic class  $d_j \in H^{2j}(B \mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R}), \mathbf{Z})$  maps (per definition) to the universal Chern class  $c_j \in H^{2j}(B U(n), \mathbf{Z})$ . It is well-known that

$$H^*(B U(n), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[c_1, \dots, c_n],$$

$$H^*(B \mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R}), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[d_1, \dots, d_n].$$

The class  $d_j = d_j(\mathbf{R})$  restricts to  $d_j(\mathbf{Z}) \in H^{2j}(\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$  for  $j = 1, \dots, n$ . Note that, strictly speaking, the class  $d_j(\mathbf{Z}) \in H^{2j}(\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$  depends also on  $n$ . But Charney has proven in [7] that for  $n > 2j + 4$  the inclusion

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Sp}(2n + 2, \mathbf{Z})$$

induces an isomorphism

$$H_j(\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} H_j(\mathrm{Sp}(2n + 2, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}).$$

It is a consequence of the universal coefficient theorem that her result implies the existence of an isomorphism

$$H^j(\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} H^j(\mathrm{Sp}(2n + 2, \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$$

for  $n > 2j + 4$ . This implies that  $H^{2j}(\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$  is independent of  $n$  for  $n > 4j + 4$ . Representations

$$\rho: \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{Sp}(2n, \mathbf{Z}),$$

$$\tilde{\rho}: \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \longrightarrow U(n)$$

induce homomorphisms

$$\rho^*: H^*(\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \longrightarrow H^*(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \mathbf{Z}),$$

$$\tilde{\rho}^*: H^*(B U(n), \mathbf{Z}) \longrightarrow H^*(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \mathbf{Z}).$$

We define  $d_j(\rho) := \rho^* d_j(\mathbf{Z})$ , the symplectic class of the representation  $\rho$ , and  $c_j(\tilde{\rho}) := \tilde{\rho}^*(c_j)$ , the Chern class of the representation  $\tilde{\rho}$ . We can consider any representation  $\tilde{\rho}$  of  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  in  $U(n)$  as a representation  $\phi \circ \tilde{\rho}$  of  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  in  $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$ . We say that  $\tilde{\rho}$  factors through  $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{Z})$  if the image

$\phi(\tilde{\rho}(z))$  of any generator  $z \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  is conjugate to a  $Y \in \text{Sp}(2n, \mathbf{Z})$ . Then  $d_j(\rho) = \tilde{\rho}^*(c_j) = c_j(\rho)$ . We define the total Chern class of a representation  $\tilde{\rho}$  to be

$$c(\tilde{\rho}) := 1 + c_1(\tilde{\rho}) + c_2(\tilde{\rho}) + \cdots + c_n(\tilde{\rho}).$$

It has the well-known properties  $c(\rho \oplus \sigma) = c(\rho)c(\sigma)$ ,  $c(m\rho) = c(\rho)^m$ , where  $\rho, \sigma$  are representations and  $m$  is a positive integer.

## 2.2 SYMPLECTIC CHARACTERISTIC CLASSES AND CHERN CLASSES

**THEOREM 2.1.** *Let  $p$  be an odd prime. Then for any  $n = 1, \dots, (p-1)/2$  there exists a representation  $\tilde{\rho}: \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \text{U}((p-1)/2)$  such that the  $n$ -th Chern class  $c_n(\tilde{\rho})$  is nonzero and the representation  $\phi \circ \tilde{\rho}: \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \text{Sp}(p-1, \mathbf{R})$  factors, up to conjugation, through a representation  $\rho: \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \text{Sp}(p-1, \mathbf{Z})$ .*

The representation  $\tilde{\rho}$  factors through  $\text{Sp}(p-1, \mathbf{Z})$  if the image  $\tilde{\rho}(z)$  of a generator  $z \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  satisfies the condition stated in Theorem 1.2. Then, because  $c_n(\tilde{\rho}) \neq 0$ , we have  $d_n(\rho) \neq 0$  where  $\rho: \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \text{Sp}(p-1, \mathbf{Z})$  is the representation corresponding to  $\tilde{\rho}$ .

*Proof of Theorem 2.1.* Let  $\mathcal{U}$  be the set of subsets  $\mathcal{I} \subset (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$  of cardinality  $|\mathcal{I}| = (p-1)/2$ , and  $j \in \mathcal{I}$  implies  $p-j \notin \mathcal{I}$ . The cardinality of  $\mathcal{U}$  is  $2^{(p-1)/2}$ . We always assume the elements  $j \in \mathcal{I}$  to be represented by integers  $j$  with  $1 \leq j < p$ . Note that we will use the same notation for the elements of  $\mathcal{I}$  and their representatives. For  $j = 1, \dots, p-1$  let  $\tilde{\rho}_j: \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \text{U}(1)$  be the one-dimensional representation with  $\tilde{\rho}_j(z) := e^{j2\pi i/p}$  for a fixed generator  $z \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ . For a given  $\mathcal{I}$  we define  $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$  to be the direct sum of the representations  $\tilde{\rho}_j$ ,  $j \in \mathcal{I}$ . Let  $x := c_1(\tilde{\rho}_1)$ , then the total Chern class of  $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$  is

$$c(\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}) = c\left(\bigoplus_{j \in \mathcal{I}} \tilde{\rho}_j\right) = \prod_{j \in \mathcal{I}} (1 + jx).$$

The representations  $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$  are those which factor through  $\text{Sp}(p-1, \mathbf{Z})$ . For a given  $\mathcal{I} \in \mathcal{U}$  we define  $-\mathcal{I} := \{p-j \mid j \in \mathcal{I}\}$ . Then  $-\mathcal{I} \in \mathcal{U}$  and  $\mathcal{I} \cup -\mathcal{I} = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ . Moreover, we get  $c(\tilde{\rho}_{\mathcal{I}})c(\tilde{\rho}_{-\mathcal{I}}) = 1 - x^{p-1}$ . The  $n$ -th Chern class  $c_n(\tilde{\rho}_{\mathcal{I}})$  is nonzero if and only if the coefficient  $a_n$  of  $x^n$  in the total Chern class  $c(\tilde{\rho}_{\mathcal{I}})$  is nonzero. Let  $\mathcal{I} := \{j_1, \dots, j_{(p-1)/2}\} \in \mathcal{U}$ ; then we define

$$\mathcal{I}_l := \{j_1, \dots, j_{l-1}, -j_l, j_{l+1}, \dots, j_{(p-1)/2}\} \in \mathcal{U}.$$

We assume that  $1 \leq n \leq (p-1)/2$  exists such that for each set  $\mathcal{I} \in \mathcal{U}$  the coefficient  $a_n$  of  $x^n$  in  $c(\tilde{\rho}_{\mathcal{I}})$  is zero. It is impossible that  $n = (p-1)/2$