3.6 Fonctions conditionnellement de type positif

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Pour α, π et β comme ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes (voir [HaVa], chapitre 4, lemme 3):

(i) α possède un point fixe;

(ii) α possède une orbite bornée;

(iii) toute orbite de α est bornée;

(iv) le cocycle b associé à α est borné;

(v) le cocycle b associé à α est un cobord.

3.6 Fonctions conditionnellement de type positif

Si $b \colon G \to \mathcal{H}$ est un cocycle continu pour la représentation π alors la fonction ψ définie par

$$\psi(g) = -\|b(g)\|^2 \qquad \text{pour tout } g \in G\,,$$

est *conditionnellement de type positif*: pour tous $g_1, \ldots, g_n \in G$, pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j \lambda_i \, \psi(g_j^{-1} g_i) \geq 0\,.$$

La fonction ψ est normalisée ($\psi(e) = 0$) et symétrique ($\psi(g) = \psi(g^{-1})$). Réciproquement, à une telle fonction continue ψ, on associe le triple GNS $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ où π_ψ est une représentation orthogonale de G dans l'espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_\psi$ et b_ψ est un cocycle à coefficients dans $\mathcal{H}_\psi$ tel que, d'une part, le sous-espace engendré par $b_\psi(G)$ est dense dans $\mathcal{H}_\psi$, et d'autre part, pour tout $g \in G$, on a

$$\psi(g) = -\frac{1}{2}\|b_\psi(g)\|^2\,.$$

Pour rappel, si V désigne l'espace vectoriel des fonctions $f \colon G \to \mathbf{R}$ de support fini et telles que $\sum_{x \in G} f(x) = 0$ alors $\mathcal{H}_\psi$ est l'espace de Hilbert réel obtenu en séparant et complétant V pour la forme bilinéaire

$$\langle f \mid h \rangle = \sum_{x,y \in G} f(x)\, h(y)\, \psi(y^{-1}x)$$

et b_ψ applique $g \in G$ sur la classe dans $\mathcal{H}_\psi$ de la différence des fonctions caractéristique de g et e. La représentation π_ψ est déduite de l'action par multiplication à gauche de G sur V.

Soit π une représentation, b un 1-cocycle à coefficients dans π et $\psi = -\|b\|^2$ la fonction conditionnellement de type positif correspondante. On note $\overline{\pi}$ la représentation conjuguée de π dans l'espace de Hilbert conjugué $\overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{b}$ le 1-cocycle à coefficients dans $\overline{\pi}$ correspondant à b. On peut alors réaliser $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ de la façon suivante: le cocycle b_ψ est donné par $b_\psi(g) = b(g) + \overline{b}(g)$, l'espace $\mathcal{H}_\psi$ est le sous-espace réel fermé de $\mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$ engendré par $b_\psi(G)$, et π_ψ est la sous-représentation de $\pi \oplus \overline{\pi}$ obtenue en restreignant l'action de $\pi \oplus \overline{\pi}$ au sous-espace réel invariant $\mathcal{H}_\psi$ (voir [Del], remarque V.3). De plus, pour tous $x, g \in G$, on a l'égalité

$$\left\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \;\middle|\; b_\psi(g) \right\rangle = \psi(g^{-1}xg) - \psi(g^{-1}x) - \psi(xg) + \psi(x)\,. \tag{3.1}$$

4. Preuve du théorème

Soient π une représentation factorielle du groupe G telle que

$$\mathrm{H}^1(G, \pi) \neq 0$$

et b un 1-cocycle continu à coefficients dans π qui n'est pas un cobord. Il s'agit de montrer que le support de π est contenu dans le cortex de G.

4.1 Stratégie

On considère la fonction conditionnellement de type positif $\psi \colon G \to \mathbf{R}$ définie par

$$\psi(x) = -\|b(x)\|^2$$

et le triple GNS $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ correspondant.

Pour tout $g \in G$ on a une fonction

$$\psi^g \colon G \longrightarrow \mathbf{C} \colon x \longmapsto \left\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \;\middle|\; b_\psi(g) \right\rangle$$

qui est de type positif et qu'on va décomposer en une somme

$$\psi^g = \varphi^g + \chi^g \tag{4.1}$$

de deux fonctions de type positif (proposition 4.7).

Soit $\widetilde{\mathcal{V}}$ un voisinage de 1_G dans $\widehat{G}$. En utilisant l'hypothèse que b n'est pas un cobord, nous montrons qu'il existe $g \in G$ tel que la fonction φ^g est non nulle (proposition 4.8) et limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons linéaires de fonctions de type positif associées à des représentations de $\widetilde{\mathcal{V}}$ (proposition 4.10).

La fin de la preuve est alors standard, et se déroule comme suit. Soit $(\mathcal{K}, \rho, \xi)$ le triple GNS défini par φ^g. Il résulte de l'assertion ci-dessus que