1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

L'Enseignement Mathématique, t. 47 (2001), p. 287–314

A PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV

par Nicolas LOUVET *)

RÉSUMÉ. On présente et généralise un résultat de Vershik et Karpushev qui établit un lien entre la 1-cohomologie des représentations unitaires d'un groupe G et la topologie de Fell au voisinage de la représentation triviale du groupe.

1. INTRODUCTION

Considérons un groupe localement compact G et une représentation continue π de G par des opérateurs unitaires sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, c'est-à-dire un morphisme π de G dans le groupe $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ des opérateurs unitaires de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tel que l'application $G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}\colon (g, \xi) \mapsto \pi(g)\,\xi$ soit continue. On note $\mathrm{Z}^1(G, \pi)$ l'espace vectoriel des *cocycles* continus de G à coefficients dans π, c'est-à-dire des applications continues $b\colon G \to \mathcal{H}$ telles que

$$b(xy) = b(x) + \pi(x)\,b(y) \qquad \text{pour tous} \quad x, y \in G\,.$$

On désigne par $\mathrm{B}^1(G, \pi)$ l'ensemble des *cobords* qui sont les cocycles de la forme

$$b(x) = \pi(x)\,\xi - \xi \qquad \text{pour tout } x \in G\,,$$

où ξ est un vecteur de $\mathcal{H}$. Le *premier groupe de cohomologie* de G à coefficients dans π est le quotient

$$\mathrm{H}^1(G, \pi) = \mathrm{Z}^1(G, \pi)/\mathrm{B}^1(G, \pi)\,.$$

Ce groupe est associé aux actions par isométries affines de G sur $\mathcal{H}$ admettant π comme partie linéaire (voir ci-dessous § 3.5).

---

*) Financé par la requête 20-56816.99 du Fonds National Suisse pour la Recherche Scientifique.

A défaut de pouvoir décrire explicitement $\mathrm{H}^1(G,\pi)$ pour toutes les représentations d'un groupe donné, ou même de déterminer pour quelles représentations π de G ce groupe est trivial, plusieurs auteurs se sont attachés à donner des interprétations qualitatives de son annulation comme de sa non-annulation. Si l'annulation de $\mathrm{H}^1(G,\pi)$ peut être vue comme un phénomène de rigidité pour la représentation π (voir [Weil], [Sto], [Rag], [LuZi]), la non-annulation de $\mathrm{H}^1(G,\pi)$ possède également une interprétation topologique que nous allons présenter.

L'ensemble $\widehat{G}$ des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles du groupe G dans un espace de Hilbert est muni de la topologie de Fell qui peut être décrite en termes de *contenance faible* (voir ci-dessous §3.4). Le *support* d'une représentation π est l'ensemble $\operatorname{supp}\pi$ des représentations irréductibles de G qui sont faiblement contenues dans π. En général, la topologie de Fell sur $\widehat{G}$ n'est pas séparée. Le *cortex* du groupe G est le sous-ensemble $\operatorname{cor} G$ de $\widehat{G}$ formé des représentations π qui sont non-séparées de la représentation triviale 1_G, c'est-à-dire telles que, pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de 1_G et pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de π, l'intersection $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}$ est non-vide.

Soit π une représentation de G. Rappelons que π est dite *irréductible* si les seuls sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$ qui sont $\pi(G)$-invariants sont $\{0\}$ et $\mathcal{H}$. On note $\mathcal{N}_\pi$ l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $\pi(g)$, $g\in G$, c'est-à-dire le bicommutant de $\pi(G)$. La représentation π est dite *factorielle* si l'algèbre de von Neumann $\mathcal{N}_\pi$ est un facteur, c'est à dire si le centre de $\mathcal{N}_\pi$ est réduit aux opérateurs scalaires. Toute représentation unitaire irréductible est factorielle (voir §3.1).

Le but de ce travail est de donner une preuve du théorème suivant (§4).

THÉORÈME. *Soit π une représentation unitaire factorielle d'un groupe localement compact séparable G.*

Si $\mathrm{H}^1(G,\pi)\neq 0$ *alors* $\operatorname{supp}\pi\subset\operatorname{cor} G$.

Ce résultat avait été conjecturé par Guichardet dans [Gui] et partiellement obtenu par Delorme dans [Del]. Vershik et Karpushev l'ont montré pour des représentations irréductibles [VeKa]. Notre preuve reprend l'essentiel des idées de Vershik et Karpushev en précisant certains points, concernant les topologies notamment, et montre que les arguments s'étendent aux cas des représentations unitaires factorielles.

Pour une représentation non-factorielle l'énoncé n'est plus valable. En effet, si π_1 est une représentation factorielle dont la cohomologie est non nulle et π_2 est une représentation n'appartenant pas au cortex, alors la représentation

$\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ a un premier groupe de cohomologie non nul mais son support contient π_2 et n'est donc pas contenu dans le cortex.

Le cortex est un sous-ensemble fermé de $\widehat{G}$. Nous avons préféré ici la définition du cortex présentée dans [BeKa] à celle donnée dans [VeKa]. Avec la définition choisie, 1_G appartient toujours au cortex. Nous donnons au §2 des exemples de groupes pour lesquels nous décrivons brièvement la 1-cohomologie des représentations irréductibles ainsi que le cortex. Pour des études détaillées du cortex de certains groupes, on pourra également consulter [BeKa] et [BLM].

REMERCIEMENTS. Je tiens à remercier Bachir Bekka qui a relevé une lacune dans la preuve originale de Vershik et Karpushev et m'a communiqué des notes manuscrites sur le sujet. Je remercie Pierre de la Harpe avec qui j'ai eu de nombreuses discussions fructueuses sur le sujet. Je les remercie tous deux, ainsi qu'Alain Valette, pour les conseils et suggestions qu'ils m'ont donnés lors de la rédaction de cet article.

2. EXEMPLES

Pour les exemples 2 et 3, on trouvera une description de la topologie du dual unitaire dans [War2, §7.1] ou [Fel2].

EXEMPLE 1 : GROUPE ABÉLIEN

Si G est un groupe abélien, alors la topologie de Fell sur $\widehat{G}$ est séparée. Le cortex de G est réduit à $\{1_G\}$. Si χ est un caractère non-trivial de G, alors $\mathrm{H}^1(G,\chi) = 0$. Pour la représentation triviale, $\mathrm{H}^1(G, 1_G)$ coïncide avec le groupe des morphismes additifs

$$\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}) = \{f \colon G \to \mathbf{C} \mid f(xy) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in G\}.$$

EXEMPLE 2 : LE GROUPE "$ax+b$"

Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbf{R},\ a > 0 \right\}$$

le groupe des transformations affines de la droite réelle préservant l'orientation. On a une identification canonique $G = \mathbf{R}_+^* \ltimes \mathbf{R}$ et on note respectivement A et B les sous-groupes $\{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}_+^*\}$ et $\{(1, b) \mid b \in \mathbf{R}\}$.