

4. Le théorème de Klein

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

• Si en outre la courbe Γ est réelle, alors la courbe simplifiée Δ peut aussi être choisie réelle, pour autant que chaque simplification d'un nœud imaginaire s'accompagne de celle du nœud imaginaire conjugué.

De plus chaque nœud réel (qu'il soit isolé ou non) admet deux modes de simplifications (cf. Figure 6) que l'on peut prescrire de façon indépendante.

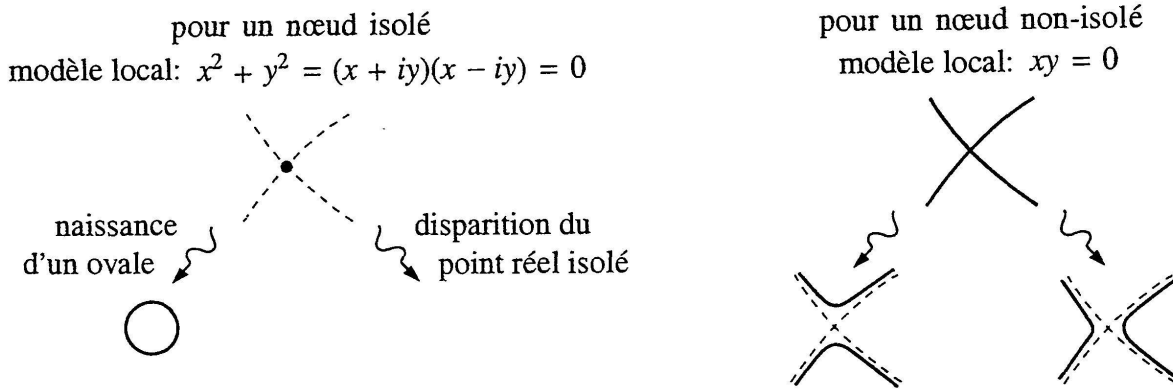


FIGURE 6

4. LE THÉORÈME DE KLEIN

La classification topologique des surfaces symétriques abstraites étant effectuée, on se demande lesquelles proviennent de l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle. La réponse est donnée par le :

THÉORÈME 4.1 (Klein 1882). *Toutes les surfaces symétriques sont réalisables comme l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle irréductible et lisse.*

Preuve. Il suffit de réaliser les modèles minimaux, puis de modéliser «algèbro-géométriquement» l'opération d'attachement d'une anse bagueée.

- Réalisation des modèles minimaux.

On considère des courbes hyperelliptiques réelles $\Gamma_0 : y^2 = f(x)$ où $f(x)$ est un polynôme réel de degré $2g + 2$ ayant des racines distinctes. La normalisée $\tilde{\Gamma}$ de la courbe projective $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$ associée à Γ_0 est alors une courbe réelle de genre g .

1. Si $f(x)$ est choisi tel que $f(x) < 0 \forall x \in \mathbf{R}$, alors $\Gamma_0(\mathbf{R})$ est vide et donc $\tilde{\Gamma}(\mathbf{R})$ aussi. On obtient de la sorte (en considérant $\tilde{\Gamma}$) pour tout g une

courbe non-séparante avec $r = 0$. Autrement dit pour toutes les valeurs du genre, il existe une courbe réelle sans point réel.

2. Si $f(x)$ est choisi tel que $f(x) > 0 \forall x \in \mathbf{R}$, alors les fibres de la projection $\pi: \Gamma_0 \rightarrow \mathbf{A}^1$ sur l'axe des x au-dessus des points réels sont exclusivement formées de points réels. Il en résulte que $\tilde{\Gamma}$ est séparante. La congruence de Klein entraîne alors que $r \equiv g + 1 \pmod{2}$. Mais la restriction de $\pi: \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbf{P}^1$ aux points réels induit un revêtement de degré 2 du cercle, et donc $r(\tilde{\Gamma})$ vaut 1 ou 2. En particulier on voit que pour tout entier g pair, il existe (avec $\tilde{\Gamma}$) une courbe séparante de genre g avec $r = 1$.

• L'opération topologique d'attachement d'une anse baguée admet la modélisation « algébro-géométrique » suivante :

Soient C une courbe réelle lisse et $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$ un modèle \mathbf{R} -birationnel plan de C ayant au pire des singularités nodales. On choisit $p \in \Gamma \setminus \Gamma(\mathbf{R})$ un point imaginaire lisse, de sorte que p admette un conjugué strict $p^\sigma \neq p$. On trace alors la « sécante galoisienne » $l := \overline{pp^\sigma}$, qui pour un choix générique de p sera transverse à Γ . Une telle droite est définie sur \mathbf{R} (car invariante par Galois) et donc (l, σ) est une sphère équatoriale.

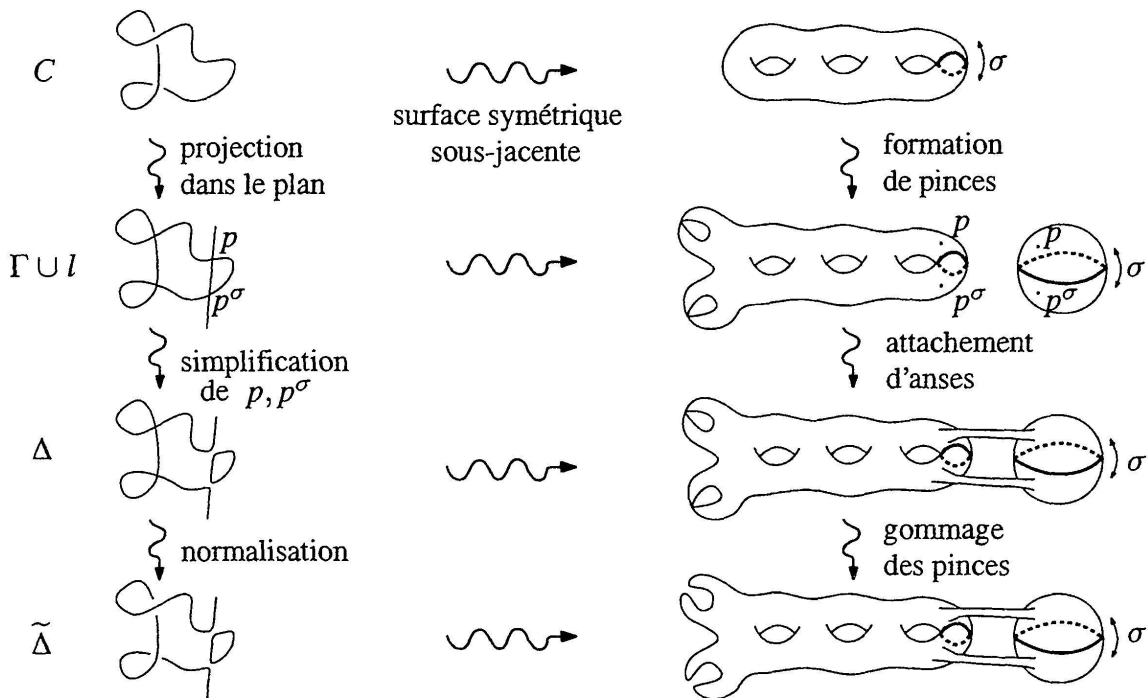


FIGURE 7

D'après Brusotti, on peut simplifier simultanément les points doubles p et p^σ sur la courbe réductible $\Gamma \cdot l = 0$. On obtient ainsi Δ une courbe réelle irréductible, dont la normalisée $\tilde{\Delta}$ se déduit topologiquement de C précisément en attachant une anse baguée en deux points symétriques (cf. Figure 7). \square