

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TOPOLOGIE DES COURBES ALGÈBRIQUES RÉELLES : UNE QUESTION DE FELIX KLEIN  
**Autor:** Gabard, Alexandre  
**Kapitel:** 1. Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64798>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## TOPOLOGIE DES COURBES ALGÈBRIQUES RÉELLES : UNE QUESTION DE FELIX KLEIN

par Alexandre GABARD

**RÉSUMÉ.** On étudie la topologie des courbes algébriques réelles selon le *point de vue de Klein*, i.e. on s'intéresse au plongement de la partie réelle d'une courbe réelle dans sa complexifiée. Le résultat principal est une caractérisation des plongements possibles pour les courbes *planes*, obtenue en montrant qu'une restriction due à Rohlin est essentiellement la seule. Ce résultat répond à une question posée par Klein, puis par Gross et Harris.

### 1. INTRODUCTION

Une courbe algébrique projective complexe  $C \subset \mathbf{P}^n$  lisse et irréductible est (pour la topologie transcendante) une surface connexe compacte orientable. Si de plus  $C$  est *réelle* (i.e. définie par des équations à coefficients réels) alors la conjugaison complexe  $\sigma \in \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ , par le biais de son action sur  $\mathbf{P}^n$  coordonnée par coordonnée, préserve globalement le lieu complexe  $C$ , en fixant point par point l'ensemble des points réels que l'on notera  $C(\mathbf{R})$ .

A la courbe réelle  $C$  est donc associée une *surface symétrique*  $(X, \sigma)$ , c'est-à-dire une surface connexe compacte orientable  $X$  munie d'une involution continue  $\sigma$  qui *renverse l'orientation*.

Felix Klein disposait non seulement de la classification topologique des surfaces symétriques, mais savait aussi qu'elles sont toutes réalisables comme l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle. Cela étant, Klein se demandait ce qu'il advient si l'on se restreint aux *courbes planes* (cf. [K3], p. 155, note en bas de page); de façon précise :

**PROBLÈME DE KLEIN.** *Caractériser les surfaces symétriques qui admettent un modèle comme l'action de Galois sur une courbe réelle lisse du plan.*

Ce problème fut reposé par Gross et Harris en 1981 (cf. [GrHa], p. 177). Il revient à étudier les plongements possibles de  $C(\mathbf{R})$  dans une courbe plane  $C$  ; alors que le plongement de  $C(\mathbf{R})$  dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  est la spécificité du 16<sup>e</sup> *problème de Hilbert*. Ce dernier est ouvert pour les degrés  $d \geq 8$ , et l'objet du présent exposé est de résoudre le *problème de Klein* pour tous les degrés.

L'exposé s'organise de la façon suivante :

- On commence par rappeler la classification topologique des surfaces symétriques en termes de trois invariants : le genre, le nombre de composantes fixes et l'alternative *séparante* ou non (la définition sera donnée au paragraphe suivant). Ensuite on va exhiber une *opération* qui permet de construire récursivement toutes les surfaces symétriques.

- Cette façon dynamique de penser aux surfaces symétriques va nous permettre de redémontrer le théorème de Klein : simplement en effectuant une « déformation » de courbes algébriques qui modélise l'opération topologique susmentionnée. Pour ce faire, on invoquera un résultat de l'école italienne dû à Brusotti, qui stipule que l'on peut « défaire » de façon indépendante les nœuds d'une courbe plane dont les seules singularités sont nodales. Cette preuve du théorème de Klein nous semble présenter l'avantage d'éviter tout transit superflu par les surfaces de Riemann : on préfère travailler directement sur leurs manifestations projectives.

- C'est alors seulement qu'on s'intéressera à la famille particularisée des courbes *planes* lisses, et ce en rappelant certains travaux de Rohlin, desquels résulte (entre autres) une restriction qui dit grosso modo qu'une courbe plane séparante possède beaucoup de composantes.

- Ensuite, quelques variations autour d'une méthode classique de Hilbert (originellement conçue pour la construction de courbes Harnack-maximales) vont nous permettre de construire des courbes planes qui réalisent tous les invariants non prohibés par Rohlin, obtenant ainsi une solution complète au problème de Klein.

## 2. LA CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES SURFACES SYMÉTRIQUES

On va d'abord classer les surfaces symétriques  $(X, \sigma)$  à *homéomorphisme équivariant* près (c'est la relation naturelle vu qu'un morphisme défini sur  $\mathbf{R}$  entre variétés algébriques réelles est équivariant pour les actions de Galois). On note  $g$  le genre de  $X$  et  $r$  le nombre de composantes de  $\text{Fix}(\sigma)$ , l'ensemble des points de  $X$  fixes par  $\sigma$ .