

3. RÉSULTATS POSITIFS EN DIMENSION UN

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

en norme $W^m(E)$; la densité de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans $W^m(E)$ en découle aussitôt.

Il reste à prouver l'inclusion $W^m(E') \subset (W^{-m}(E))'$, pour $m > 0$. Soit f une distribution à support compact appartenant à $W^m(E')$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$; en appliquant la proposition 4 à $f * \varphi_k$ et g , on obtient :

$$|\langle f * \varphi_k, g \rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)};$$

puisque $\tilde{\varphi}_k * g \rightarrow g$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, il vient

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)},$$

autrement dit $f \in W^{-m}(E)'$. Si f est un élément quelconque de $W^m(E')$, on approche f par les $f\rho_k$ et on conclut comme ci-dessus.

REMARQUE. L'étude de la dualité des $W^m(E)$ peut se conduire dans le cadre plus général de l'échelle de Sobolev associée à un C_0 -groupe (voir le chapitre III de [1], notamment le théorème 3.3.28).

3. RÉSULTATS POSITIFS EN DIMENSION UN

THÉORÈME 3. Soit E un EBD dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, ayant les propriétés (P_0) et (P_1) ; soit $m > 0$. Alors

$$E = W^{-m}(W^m(E)), \quad E' = W^{-m}(W^m(E')).$$

Si de plus E satisfait (P_2) , alors les échelles de Sobolev d'origines E et E' sont invariantes.

Preuve. D'après le lemme 1, l'opérateur défini par

$$Tf = \int_0^\infty e^{-t\tau_t} f dt$$

est borné sur E . Puisque $(Tf)' = f - Tf$ pour $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, la même propriété est vraie au sens des distributions quel que soit $f \in E$. On en déduit aussitôt que T^m est un opérateur borné de E dans $W^m(E)$. Si $f \in E$ et $g = T^m(f)$, il vient

$$f = \sum_{j=0}^m C_m^j g^{(j)},$$

de sorte que f appartient à $W^{-m}(W^m(E))$. On peut aussi définir T sur E' , à l'aide de la formule

$$\langle Tf, g \rangle = \int_0^\infty e^{-t} \langle f, \tau_{-t}g \rangle dt;$$

cela nous donne $E' = W^{-m}(W^m(E'))$; on applique alors le théorème 2 et la proposition 1 pour obtenir $E = W^m(W^{-m}(E))$ et $E' = W^m(W^{-m}(E'))$. Il nous reste à vérifier la propriété (5). Pour $m > k$, on applique la première partie de la preuve à l'espace $W^{m-k}(E)$, ainsi que la proposition 1; il vient

$$W^{m-k}(E) = W^{-k}(W^k(W^{m-k}(E))) = W^{-k}(W^m(E));$$

par ailleurs :

$$W^{m-k}(E) = W^{m-k}(W^k(W^{-k}(E))) = W^m(W^{-k}(E)).$$

Le cas $m < k$ se traite de manière analogue. Le même raisonnement s'applique à E' .

REMARQUE. Le théorème 3 se retrouve aussi dans le cadre des C_0 -groupes ([1], théorème 3.3.23).

4. RÉSULTATS NÉGATIFS EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES

4.1 LA PROPRIÉTÉ DE MITIAGIN-ORNSTEIN

DÉFINITION 3. Soit E un EBD dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. On dit que E possède la propriété de Mitiagin-Ornstein si, pour toute distribution f , les conditions $\partial_j^k f \in E$ ($j = 1, 2$; $k = 0, 1, 2$) impliquent $\partial_1 \partial_2 f \in E$.

PROPOSITION 5. Si E est un EBD dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, alors $W^1(E)$ possède la propriété de Mitiagin-Ornstein.

Preuve. Supposons $\partial_j^k f \in W^1(E)$, pour $j = 1, 2$ et $k = 0, 1, 2$. On a en particulier $\partial_2 f \in W^1(E)$, d'où $\partial_1 \partial_2 f \in E$. La condition $\partial_1^2 f \in W^1(E)$ implique

$$\partial_1(\partial_1 \partial_2 f) = \partial_2(\partial_1^2 f) \in E;$$

on obtient de même $\partial_2(\partial_1 \partial_2 f) \in E$. Ainsi $\partial_1 \partial_2 f$ appartient à $W^1(E)$.