

## 2.2 Generalized Bernoulli polynomials

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Since any Dirichlet character  $\chi$  is multiplicative, we must have  $\chi(-1) = \pm 1$ . A character  $\chi$  is said to be odd if  $\chi(-1) = -1$ , and even if  $\chi(-1) = 1$ .

## 2.2 GENERALIZED BERNOULLI POLYNOMIALS

Let  $\chi$  be a Dirichlet character with conductor  $f_\chi$ . Then we define the functions,  $B_{n,\chi}(t)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \geq 0$ , by the generating function

$$(1) \quad \sum_{a=1}^{f_\chi} \frac{\chi(a)xe^{(a+t)x}}{e^{f_\chi x} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi}(t) \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \frac{2\pi}{f_\chi}.$$

We define the generalized Bernoulli numbers associated with  $\chi$ ,  $B_{n,\chi}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \geq 0$ , by

$$\sum_{a=1}^{f_\chi} \frac{\chi(a)xe^{ax}}{e^{f_\chi x} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \frac{2\pi}{f_\chi},$$

so that  $B_{n,\chi}(0) = B_{n,\chi}$ . Note that

$$\sum_{a=1}^{f_\chi} \frac{\chi(a)xe^{(a+t)x}}{e^{f_\chi x} - 1} = e^{tx} \sum_{a=1}^{f_\chi} \frac{\chi(a)xe^{ax}}{e^{f_\chi x} - 1},$$

which implies that

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi}(t) \frac{x^n}{n!} = e^{tx} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{x^n}{n!},$$

and from this we obtain

$$(2) \quad B_{n,\chi}(t) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} B_{n-m,\chi} t^m.$$

Thus the functions  $B_{n,\chi}(t)$ , defined in (1), are actually polynomials, called the generalized Bernoulli polynomials associated with  $\chi$ . Let  $\mathbf{Z}[\chi]$  denote the ring generated over  $\mathbf{Z}$  by all the values  $\chi(a)$ ,  $a \in \mathbf{Z}$ , and  $\mathbf{Q}(\chi)$  the field generated over  $\mathbf{Q}$  by all such values. Then it can be shown that  $f_\chi B_{n,\chi}$  must be in  $\mathbf{Z}[\chi]$  for each  $n \geq 0$  whenever  $\chi \neq 1$ . In general, we have  $B_{n,\chi} \in \mathbf{Q}(\chi)$  for each  $n \geq 0$ , and so  $B_{n,\chi}(t) \in \mathbf{Q}(\chi)[t]$ . The polynomials  $B_{n,\chi}(t)$  exhibit the property that, for all  $n \geq 0$ ,

$$(3) \quad B_{n,\chi}(-t) = (-1)^n \chi(-1) B_{n,\chi}(t),$$

whenever  $\chi \neq 1$ . Thus  $B_{n,\chi}(t)$ , for  $\chi \neq 1$ , is either an even function or an odd function according to whether  $(-1)^n \chi(-1)$  is 1 or  $-1$ . From (3) we obtain

$$B_{n,\chi} = (-1)^n \chi(-1) B_{n,\chi},$$

and so  $B_{n,\chi} = 0$  whenever  $n$  is even and  $\chi$  is odd, or whenever  $n$  is odd and  $\chi$  is even,  $\chi \neq 1$ . Another property that the polynomials satisfy is that for  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $m \geq 1$ ,

$$(4) \quad B_{n,\chi}(mf_\chi + t) - B_{n,\chi}(t) = n \sum_{a=1}^{mf_\chi} \chi(a)(a+t)^{n-1},$$

for all  $n \geq 0$ . This can be derived from (1). Note that for  $\chi = 1$  and  $t = 0$  this becomes

$$\frac{1}{n} (B_{n,1}(m) - B_{n,1}) = \sum_{a=1}^m a^{n-1}.$$

If  $\chi \neq 1$ , then it can be shown that  $\sum_{a=1}^{f_\chi} \chi(a) = 0$ , and from the above relations we can derive

$$B_{0,\chi} = \frac{1}{f_\chi} \sum_{a=1}^{f_\chi} \chi(a)$$

for all  $\chi$ . Therefore

$$B_{0,\chi} = \begin{cases} 0, & \text{if } \chi \neq 1 \\ 1, & \text{if } \chi = 1. \end{cases}$$

The ordinary Bernoulli polynomials,  $B_n(t)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \geq 0$ , are defined by

$$(5) \quad \frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < 2\pi,$$

and the Bernoulli numbers,  $B_n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \geq 0$ ,

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < 2\pi.$$

From this we obtain the values  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -1/2$ ,  $B_2 = 1/6$ ,  $B_4 = -1/30$ , ..., with  $B_n = 0$  for odd  $n \geq 3$ . For even  $n \geq 2$ , we have

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m} B_m.$$

Note that we again have the relations  $B_n(0) = B_n$  and

$$B_n(t) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} B_{n-m} t^m,$$

as we did for the generalized Bernoulli polynomials.

Some of the more important properties of Bernoulli polynomials are that

$$(6) \quad B_n(t + 1) - B_n(t) = nt^{n-1}$$

for all  $n \geq 1$ , and

$$B_n(1 - t) = (-1)^n B_n(t)$$

for  $n \geq 0$ . Each of these results can be derived from the generating function (5) above.

Similar to (4) for the generalized Bernoulli polynomials, whenever  $m, n \in \mathbf{Z}$ ,  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{n} (B_n(m) - B_n) = \sum_{a=0}^{m-1} a^{n-1},$$

where we take  $0^0$  to be 1 in the case of  $a = 0$  and  $n = 1$ . Note that this can be derived from (6) since

$$B_n(m) - B_n = \sum_{a=0}^{m-1} (B_n(a + 1) - B_n(a)).$$

The Bernoulli numbers are rational numbers, and, in fact, the von Staudt-Clausen theorem states that for even  $n \geq 2$ ,

$$B_n + \sum_{\substack{p \text{ prime} \\ (p-1)|n}} \frac{1}{p} \in \mathbf{Z}.$$

Thus the denominator of each  $B_n$  must be square-free.

The ordinary Bernoulli numbers are related to the generalized Bernoulli numbers in that for  $\chi = 1$  we have

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,1} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < 2\pi,$$

and since

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = x + \frac{x}{e^x - 1},$$

we see that  $B_{n,1} = B_n$  for all  $n \neq 1$ , and  $B_{1,1} = -B_1$ . In fact, this can be written as  $B_{n,1} = (-1)^n B_n$ , and for the polynomials,  $B_{n,1}(t) = (-1)^n B_n(-t)$ .