1.3 Le théorème de Yoccoz

dans $f(\Gamma_{n+1}) = \Gamma_n$. Ceci montre que l'application de $P_{n+1}(x)$ dans $P_n\big(f(x)\big)$ induite par f est propre et est donc un revêtement ramifié. Si $P_{n+1}(x)$ ne contient pas le point critique, cette application est un homéomorphisme ; sinon, c'est un revêtement double ramifié car le point critique est simple.

c) Comme le graphe Γ est connexe, les pièces de profondeur 0 sont simplement connexes. On procède ensuite par récurrence. Si P est une pièce de profondeur $n+1$, son image $f(P)$ est une pièce de profondeur n et est donc simplement connexe. Comme f induit un revêtement ramifié de P sur $f(P)$, la formule de Riemann-Hurwitz montre que P est simplement connexe. $\square$

DÉFINITION 1.7. Si $x \in K(f)$ est un point dont l'orbite positive ne rencontre pas Γ, il est contenu dans une suite infinie et décroissante de pièces. On appelle *bout* de x cette suite

$$\big(P_0(x) \supset P_1(x) \supset \cdots \supset P_n(x) \supset \cdots\big).$$

et *impression* de x l'intersection de ces pièces

$$\operatorname{Imp}(x) = \bigcap_{n \geq 0} P_n(x).$$

Le lemme 1.8 montre que l'application f envoie naturellement le bout de x sur celui de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f\big(\big(P_0(x) \supset P_1(x) \supset \cdots\big)\big) &= \big(f(P_1(x)) \supset f(P_2(x)) \supset \cdots\big) \\ &= \big(P_0(f(x)) \supset P_1(f(x)) \supset \cdots\big). \end{aligned}$$

En particulier, on dit qu'un bout est *périodique* par f s'il est égal à son image par f^k pour un $k > 0$.

1.3 Le théorème de Yoccoz

DÉFINITION 1.9. Étant donné un graphe admissible Γ pour une application à allure rationnelle simple f, on dit qu'un point x de $K(f)$ est *bagué* — à la profondeur n — si la condition suivante est satisfaite :

$$\overline{P}_{n+1}(x) \subset P_n(x).$$

On dit que x est *infiniment bagué* par Γ s'il est bagué à une infinité de profondeurs différentes.

Le théorème ci-dessous, dû à J.-C. Yoccoz, est un outil essentiel pour étudier la connexité locale des ensembles de Julia (voir [H, M2]). Il fait l'objet de cette première partie et est démontré dans les paragraphes 1.4 à 1.6. Dans la seconde partie on en donne une application.

THÉORÈME 1.10 (Yoccoz). *Soit $f\colon X' \to X$ une application à allure rationnelle ayant un unique point critique x_0, lequel est simple, et soit x un point de $K(f)$. Étant donné un graphe admissible Γ qui bague x_0 et bague infiniment x, on a l'alternative suivante :*

- *si le bout du point critique x_0 n'est pas périodique, l'impression* $\mathrm{Imp}(x)$ *est réduite au point x ;*
- *si le bout du point critique x_0 est périodique, de période k, l'application $f^k\colon P_{l+k}(x_0) \to P_l(x_0)$ est à allure quadratique, pour un entier l assez grand, et son ensemble de Julia rempli est l'impression* $\mathrm{Imp}(x_0)$ *de x_0. De plus, selon que x tombe ou non dans* $\mathrm{Imp}(x_0)$ *par itération, son impression* $\mathrm{Imp}(x)$ *est soit une préimage conforme de* $\mathrm{Imp}(x_0)$*, soit le seul point x.*

REMARQUE 1.11. a) Les deux cas envisagés dans le théorème 1.10 se présentent. Lorsque x_0 et $f(x_0)$ sont séparés par Γ, que $f(x_0)$ est périodique alors que x_0 ne l'est pas, le bout du point critique n'est pas périodique. Par contre lorsque x_0 est périodique son bout est évidemment périodique.

b) Si l'impression d'un point x de $K(f)$ est réduite à x, la suite des pièces $P_n(x)$ forme un système fondamental de voisinages de x. Ainsi, si l'intersection de $K(f)$ avec $P_n(x)$ ou $\bar{P}_n(x)$ est connexe pour tout n assez grand, l'ensemble $K(f)$ est localement connexe en x.

Pour exploiter le théorème de Yoccoz, il faut donc d'abord construire des graphes Γ qui soient admissibles pour f, et en particulier stables. Lorsque f est en fait définie sur $\bar{X}$, la stabilité de Γ est équivalente à la condition $f(\Gamma) \cap X \subset \Gamma$, qui est un peu plus maniable.

Il faut ensuite que ces graphes baguent infiniment les points de $K(f)$. Le lemme suivant donne pour cela un critère bien utile.

LEMME 1.12. *Soit K une partie de X' contenant son image $f(K)$. On suppose qu'il existe un nombre fini de graphes admissibles $\Gamma^0, \dots, \Gamma^r$ et un entier l tels que tout point de K soit bagué, à une profondeur inférieure à l, par l'un des graphes Γ^i. Alors tout point de K est infiniment bagué par l'un des Γ^i.*

Preuve. Pour $0 \leq i \leq r$, soit U_i l'ensemble des points bagués à une profondeur inférieure à l par Γ^i. Par définition, U_i est la réunion des pièces

P^i_{n+1} de profondeur $n+1 \leq l$ (définies par Γ^i) dont l'adhérence est incluse dans une pièce P^i_n de profondeur n. Par hypothèse, la réunion des U_i pour $0 \leq i \leq r$ recouvre K.

Si x est un point de K, son orbite (positive) reste dans K car K contient $f(K)$. Par suite, elle visite une infinité de fois l'un des U_i, donc aussi une infinité de fois l'une des pièces $P^i_{n+1} \subset U_i$. Autrement dit, $f^{n_j}(x)$ est dans P^i_{n+1} pour une infinité d'entiers n_j. Comme chaque application f^{n_j} est ouverte et envoie proprement les pièces $P^i_{n+n_j+1}(x)$ et $P^i_{n+n_j}(x)$ sur P^i_{n+1} et P^i_n respectivement, le fait que $\overline{P}^i_{n+1}$ soit inclus dans P^i_n implique que l'adhérence de $P^i_{n+n_j+1}(x)$ est contenue dans $P^i_{n+n_j}(x)$. Par conséquent, x est bagué par Γ^i à toutes les profondeurs $n+n_j$. □

Les paragraphes suivants de cette première partie exposent la preuve du théorème de Yoccoz 1.10. En voici auparavant un premier aperçu dans lequel on introduit quelques notions utiles.

Dans le bout d'un point x, on prend deux pièces consécutives et on regarde leur différence $A_i(x) = P_i(x) \setminus \overline{P}_{i+1}(x)$. Si x est bagué à la profondeur i, $A_i(x)$ est un anneau de $\widehat{\mathbf{C}}$ au sens où son complémentaire dans $\widehat{\mathbf{C}}$ a deux composantes connexes dont une, au moins, n'est pas un point. L'anneau $A_i(x)$ est alors (voir [A]) conformément équivalent à un unique anneau standard

$$A_r = \{z \in \mathbf{C} \mid r < |z| < 1\}, \qquad r \geq 0.$$

et possède un *module* qui vaut

$$\operatorname{mod} A_i(x) = -\frac{\log r}{2\pi} \in \,]0, \infty].$$

Si $\partial P_i(x)$ touche $\partial P_{i+1}(x)$, on dira que $A_i(x)$ est un *anneau dégénéré* et on lui attribuera un module nul. On dispose alors du critère suivant :

LEMME 1.13. *Si la série des modules des anneaux $P_i(x) \setminus \overline{P}_{i+1}(x)$ diverge, l'impression* $\operatorname{Imp}(x)$ *de x est réduite au point x.*

Preuve. C'est une conséquence directe des deux résultats classiques suivants que l'on trouvera par exemple dans [A] :

- si un anneau A contient une suite d'anneaux A_i disjoints et tous homotopes à A, alors $\operatorname{mod} A \geq \sum_i \operatorname{mod} A_i$ (inégalité de Grötzsch) ;
- si U est un disque conforme, si $K \subset U$ est un compact connexe plein (*i.e.* tel que $U \setminus K$ soit connexe) et si le module de l'anneau $A = U \setminus K$ est infini, alors K est réduit à un point. □

La proposition qui suit (version triviale du théorème de Yoccoz) règle le cas où le point critique x_0 n'est pas dans $K(f)$, moyennant un rétrécissement de X'. En outre elle donne une idée sur la manière dont on peut appliquer le lemme ci-dessus et utiliser la dynamique pour étudier la série $\sum_i \operatorname{mod} A_i(x)$.

PROPOSITION 1.14. *Soit $f\colon X' \to X$ une application à allure rationnelle n'ayant aucun point critique et soit x un point de $K(f)$. Si un graphe admissible Γ bague x infiniment, l'impression* $\operatorname{Imp}(x)$ *est réduite au point x.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des anneaux de la forme $P_0 \setminus \bar{P}_1$, où P_0, P_1 sont des pièces du puzzle de profondeurs respectives 0 et 1. Comme le graphe Γ est fini, $\mathcal{A}$ est un ensemble fini. Par ailleurs, comme f n'a aucun point critique, f^i induit, pour tout $i \geq 0$, un homéomorphisme conforme de l'anneau $A_i(x)$ sur un anneau élément de $\mathcal{A}$. Il en résulte d'une part qu'il existe une infinité d'entiers i pour lesquels les images $f^i\big(A_i(x)\big)$ sont égales à un même anneau $A \in \mathcal{A}$, d'autre part que ces anneaux $A_i(x)$ ont tous le même module que A. Par suite, la série $\sum_i \operatorname{mod} A_i(x)$ diverge et le lemme 1.13 en tire la conclusion. $\square$

Cette preuve s'effondre évidemment dès que f a un point critique x_0 dans $K(f)$. Quand $P_i(x)$ contient x_0, on peut seulement minorer le module de $A_i(x)$ par $(1/2) \operatorname{mod} A_{i-1}\big(f(x)\big)$ (voir le lemme 1.17). La comparaison de $\operatorname{mod} A_i(x)$ avec le module des anneaux de profondeur 0 dépend alors du nombre d'images itérées de $P_i(x)$ qui contiennent x_0 et, en fin de compte, de la récurrence du point critique x_0. Si celle-ci n'est pas trop forte, on peut encore trouver une infinité d'anneaux $A_i(x)$ ayant un même module. Sinon, une étude plus approfondie de la combinatoire est nécessaire.

1.4 Présentation des tableaux et de leurs propriétés

Soit Γ un graphe admissible pour une application à allure rationnelle simple $f\colon X' \to X$ et x un point de $K(f)$ dont l'orbite positive évite Γ.

DÉFINITION 1.15. Le *tableau* $T(x)$ du point x est la matrice de pièces, infinie vers la droite et le bas, dont la j-ième colonne, $j \geq 0$, donne en descendant les éléments du bout de $f^j(x)$. Autrement dit, l'élément de la j-ième colonne et i-ième ligne (en comptant vers le bas) est la pièce $T(x)_{i,j} = P_i\big(f^j(x)\big)$, $i,j \geq 0$.

Ainsi, pour tous $i \geq 1$, $j \geq 0$, l'inclusion $P_i\big(f^j(x)\big) \to P_{i-1}\big(f^j(x)\big)$