

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 45 (1999)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE MAJORATION DE LA LONGUEUR DES POLYNÔMES  
CYCLOTOMIQUES  
**Autor:** NICOLAS, Jean-Louis / TERJANIAN, Guy  
**Kapitel:** 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64451>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

et comme  $k \geq 3$ , et en appliquant le lemme 1,

$$1,81m^{0,32} < \frac{3 \log 2}{5} \frac{m}{\log m}.$$

Finalement, comme  $\frac{5 \times 1,81}{3 \log 2} < 4,36$ , il suffit de montrer

$$m^{0,68} - 4,36 \log m > 0.$$

L'inégalité ci-dessus est vérifiée pour tout  $m \geq 75$  et comme le plus petit nombre  $m$  avec  $k = \omega'(m) \geq 3$  est  $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ , (4) est démontrée pour tous les  $m$  avec  $k = \omega'(m) \geq 3$ , et cela termine la preuve du théorème 1.

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

D'abord, on a  $P_m(1) = \Phi_m(1)$  et par (14), 1 n'est pas racine de  $P_m$  pour  $m \geq 2$ . De même,  $-1$  n'est pas racine de  $P_m$  : lorsque  $m$  est impair, (1) donne

$$\Phi_m(-1) = \prod_{d|m} 2^{\mu(d)} = 2^{\sum_{d|m} \mu(d)} = 1$$

dès que  $m \geq 3$ . Les formules (18), (20) et (14) montrent que pour  $m \geq 3$ ,  $\Phi_m(-1)$  est impair, sauf pour  $m = 2^n$  où l'on a  $\Phi_m(-1) = 2$ . On ne peut donc avoir  $P_m(-1) = 0$ .

Soit maintenant  $z$  une racine de l'unité différente de 1 et  $-1$  et d'ordre  $r \neq 6$  telle que  $P_m(z) = 0$ . Par conjugaison, les autres racines d'ordre  $r$  sont aussi racines de  $P_m$ . Soit  $k$  l'ordre de  $-z$ . (Si  $r \equiv 0 \pmod{4}$ , on a  $k = r$ ; si  $r \equiv 2 \pmod{4}$ , on a  $k = r/2$ ; si  $r$  est impair, on a  $k = 2r$ .) On a  $P_m(-\exp(\frac{2i\pi}{k})) = 0$ , et comme  $\varphi(m)$  est pair, il vient

$$\Phi_m\left(-\exp\left(\frac{2i\pi}{k}\right)\right) = \left(\exp\left(\frac{2i\pi}{k}\right) + 1\right)^{\varphi(m)}.$$

D'où en prenant les modules,

$$\beta(m) \geq \left| \Phi_m\left(-\exp\left(\frac{2i\pi}{k}\right)\right) \right| \geq \left(2 \cos \frac{\pi}{k}\right)^{\varphi(m)}.$$

Comme  $z^2 \neq 1$ , on a  $k \neq 1, 2$ . On a  $k \neq 3$ , sinon,  $z$  serait d'ordre  $r = 6$ . Donc  $k \geq 4$  et

$$\beta(m) \geq (\sqrt{2})^{\varphi(m)}.$$

Par le théorème 1,  $m$  doit être égal à 2, 3, 4, 5, 6 ou 10. Le calcul direct des polynômes  $P_m$  pour ces valeurs montre qu'ils vérifient aussi le théorème et cela achève la démonstration du théorème 2.

La vérification de l'irréductibilité sur  $\mathbf{Z}[X]$  du polynôme  $E_m$  défini par (13) se fait sans problème en utilisant la procédure *irreduc* de Maple<sup>®</sup> jusqu'à  $m = 290$ . Ensuite pour les valeurs de  $m$  qui sont des nombres premiers, il y a un manque de mémoire. Nous avons donc séparé le travail en deux. Pour les nombres  $m$  composés, la procédure *irreduc* marche jusqu'à 1000. Pour les nombres  $m$  premiers, nous factorisons  $E_m$  (qui est unitaire) sur  $\mathbf{F}_p[X]$  pour des petits nombres premiers  $p$  jusqu'à trouver une impossibilité à une factorisation dans  $\mathbf{Z}[X]$ . Par exemple, pour  $m = 607$ ,  $E_m$  est de degré 600. Il se factorise modulo 2 en un produit de 6 facteurs irréductibles de degré 100, tandis que, modulo 5, il se factorise en un produit de 8 facteurs irréductibles : 3 de degré 4, 2 de degré 18 et 3 de degré 184. Cette méthode a permis de tester tous les nombres premiers  $m$  jusqu'à 1000.

Nous avons également utilisé la propriété démontrée dans [5] : lorsque  $m$  est premier, s'il existe un nombre premier  $p$  tel que  $E_m$  ait au plus 3 facteurs irréductibles modulo  $p$ , alors  $E_m$  est irréductible dans  $\mathbf{Z}[X]$ . Exemple :  $m = 601$ ,  $p = 23$ ,  $E_m$  a 2 facteurs irréductibles de degré 297 ;  $m = 349$ ,  $p = 3$ ,  $E_m$  a 3 facteurs irréductibles de degré 114.

## RÉFÉRENCES

- [1] BATEMAN, P.T. Note on the coefficients of the cyclotomic polynomial. *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949), 1180–1181.
- [2] BATEMAN, P.T., C. POMERANCE and R.C. VAUGHAN. On the size of the coefficients of the cyclotomic polynomials. In: *Colloquia Mathematica János Bolyai, vol. 34. Topics in Classical Number Theory*. Budapest (Hungary). North Holland, 1984, 171–202.
- [3] DEBARRE, O. and M.J. KLASSEN. Points of low degree on smooth plane curves. *J. reine angew. Math.* 446 (1994), 81–87.
- [4] HARDY, G.H. and E.M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers*. 4th edition. Clarendon Press, Oxford, 1960.
- [5] HÉLOU, C. Cauchy-Mirimanoff polynomials. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* 19 (2) (1997), 51–57.
- [6] KNUTH, D.E. *The Art of Computer Programming, vol. 2 (Semi-numerical Algorithms)*. 2nd edition. Addison Wesley, 1981.
- [7] MIGOTTI, A. Zur Theorie der Kreistheilungsgleichung. *Sitz. Akad. Wiss. Wien (Math.)* (2) 87 (1883), 7–14.
- [8] NICOLAS, J.-L. et G. ROBIN. Majorations explicites pour le nombre de diviseurs de  $n$ . *Canad. Math. Bull.* 26 (1983), 485–492.
- [9] RAMANUJAN, S. Highly Composite Numbers. *Proc. London Math. Soc.* (2) 14 (1915), 347–400. (*Collected Papers*. Cambridge University Press, 1927 and Chelsea, 1962, 78–128.)