

## 4. Une application

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Enfin,

$$|\nu_n(\sqrt{x})\nu(\sqrt{x})| \leq n2^a K_2 A_0 (2 \log \log 3x + K_3)^{n-1} \log^{-a} x.$$

L'inégalité fondamentale au rang  $n + 1$  résulte donc de :

$$\begin{aligned} n A_0 (L + A_1)^{n-1} (L + K_3 + K_4) + K_1 (L + K_3)^n \\ + n K_1 K_4 (L + K_3)^{n-1} + 2^a K_2 A_0 n (L + K_3)^{n-1} \leq (n + 1) A_0 (L + A_1)^n, \end{aligned}$$

où  $L := 2 \log \log 3x$ , et cela est vrai, vu les définitions de  $A_0$  et  $A_1$ .

En conclusion,

$$d\Pi = d\tau + (\log c)\delta + td\nu$$

donc

$$dN = e^{d\Pi} = ce^{d\tau} * (te^{d\nu}) = c(\delta + dt) * (te^{d\nu})$$

d'où

$$\begin{aligned} N(x) &= c \int_1^x \left( \int_1^{x/u} \delta + dt \right) ue^{d\nu} \\ &= cx \int_1^x e^{d\nu} = cx + cx \sum_{n \geq 1} \frac{\nu_n(x)}{n!}. \end{aligned}$$

L'inégalité fondamentale permet de majorer la dernière somme :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\nu_n(x)}{n!} \leq A_0 \log^{-a} x \sum_{n \geq 1} \frac{(2 \log \log 3x + A_1)^{n-1}}{(n-1)!} = A_0 e^{A_1} (\log 3x)^2 \log^{-a} x,$$

d'où le résultat.

#### 4. UNE APPLICATION

Dans ce paragraphe, nous proposons une variation sur un thème abordé dans [2] à propos de la fonction d'Euler.

**THÉORÈME 9.** *Soit  $\beta$  une suite de nombres premiers généralisés telle que  $\beta_n$  diffère du  $n$ -ème nombre premier usuel  $p_n$  par une quantité  $O(n^a)$ , où  $0 \leq a < 1$ . On a alors, pour tout  $c$  fixé,  $c < \sqrt{2(1-a)}$ ,*

$$\varepsilon(x) \ll \mathcal{L}(x)^{-c},$$

pour  $x \geq 3$ , où  $\mathcal{L}(x) := e^{\sqrt{\log x \log \log x}}$ .

Observons que le résultat pour  $a = 0$  découle du cas  $a > 0$ ; nous supposons donc  $a > 0$  dans la suite. Dans le cas particulier où la différence  $\beta_n - p_n$  est constante, la méthode de [3] donne un meilleur résultat, comparable à l'estimation de Korobov et Vinogradov du terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers.

La démonstration du théorème repose sur les lemmes suivants.

LEMME 4. *Sous l'hypothèse du théorème 9 et en notant  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  les fonctions associées respectivement aux suites  $(p_n)$  et  $(\beta_n)$  comme dans la proposition 4, nous avons :*

$$\int_1^x \frac{d(\Pi_2 - \Pi_1)(t)}{t} = \log D + O(x^{a-1})$$

où

$$D = \prod_{n \geq 1} \frac{1 - 1/p_n}{1 - 1/\beta_n}.$$

*Démonstration.* Soit  $K$  un nombre entier fixé, supérieur à  $1/a$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{d(\Pi_2 - \Pi_1)(t)}{t} &= \sum_{\beta_n^k \leq x} \frac{1}{k\beta_n^k} - \sum_{p_n^k \leq x} \frac{1}{kp_n^k} \\ &= \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k} \Delta_k(x^{1/k}) + \sum_{n \geq 1, k \geq K} \frac{\beta_n^{-k} - p_n^{-k}}{k} \\ &\quad + o\left(\sum_{k \geq K, \beta_n^k > x} \frac{1}{k\beta_n^k}\right) + o\left(\sum_{k \geq K, p_n^k > x} \frac{1}{kp_n^k}\right) \end{aligned}$$

où

$$\Delta_k(t) := \sum_{\beta_n \leq t} \frac{1}{\beta_n^k} - \sum_{p_n \leq t} \frac{1}{p_n^k}.$$

La majoration de Tchebycheff pour la fonction de comptage des nombres premiers nous donne :

$$\sum_{k \geq K, p_n^k \leq x} \frac{1}{k} \ll \sum_{K \leq k \leq \log x / \log 2} \frac{1}{k} \frac{x^{1/k}}{\log(x^{1/k})} \ll x^{1/K}$$

et de même,

$$\sum_{k \geq K, \beta_n^k \leq x} \frac{1}{k} \ll x^{1/K}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k \geq K, \beta_n^k > x} \frac{1}{k\beta_n^k} + \sum_{k \geq K, p_n^k > x} \frac{1}{kp_n^k} \ll \int_x^{+\infty} t^{\frac{1}{k}-2} dt \ll x^{\frac{1}{k}-1} \ll x^{a-1}.$$

Maintenant,

$$\Delta_k(t) = \sum_{p_n \leq t} (\beta_n^{-k} - p_n^{-k}) + O(E_k(t))$$

où

$$E_k(t) := \sum_{p_n \leq t, \beta_n > t} \beta_n^{-k} + \sum_{p_n > t, \beta_n \leq t} \beta_n^{-k}.$$

Comme  $p_n - \beta_n = O(n^a)$ , et  $p_n \sim n \log n$ , on a, pour une constante positive convenable  $H$  et pour tout  $k$  fixé :

$$E_k(t) \ll \sum_{|p_n - t| \leq Ht^a} t^{-k} \ll \frac{t^{a-k}}{\log t}$$

d'après l'inégalité de Brun-Titchmarsh. Il en résulte que

$$\sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k} E_k(x^{1/k}) \ll x^{a-1}.$$

Comme d'autre part,

$$\sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k} \sum_{p_n \leq x^{1/k}} (\beta_n^{-k} - p_n^{-k}) = \sum_{n \geq 1, 1 \leq k < K} \frac{\beta_n^{-k} - p_n^{-k}}{k} - \sum_{1 \leq k < K} \sum_{p_n^k > x} \frac{\beta_n^{-k} - p_n^{-k}}{k},$$

il suffit pour conclure de vérifier que pour chaque  $k$  fixé, on a :

$$\sum_{p_n > x^{1/k}} |\beta_n^{-k} - p_n^{-k}| \ll x^{a-1}.$$

Or  $|\beta_n^{-k} - p_n^{-k}| \ll n^a p_n^{-k-1}$  donc

$$\sum_{p_n > t} |\beta_n^{-k} - p_n^{-k}| \ll \int_t^{+\infty} u^{a-k-1} du \ll t^{a-k}$$

d'où le résultat.  $\square$

LEMME 5. Soit  $d\alpha$  une mesure et  $b$  un nombre réel positif tels que

$$(i) \quad \|d\alpha\|_x \ll \log \log 3x, \quad x \geq 1;$$

$$(ii) \quad \alpha(x) \ll x^{-b}, \quad x \geq 1.$$

Soit  $d\beta = e^{d\alpha}$ ,  $d\gamma(t) = td\beta(t)$  et  $d\mu = dN_1 * d\gamma$ , où  $N_1(t) = [t]$ . Alors, pour toute constante  $c < \sqrt{2b}$ , on a :

$$(iii) \quad \beta(x) = 1 + O(\mathcal{L}(x)^{-c}), \quad x \geq 3;$$

$$(iv) \quad \gamma(x) \ll x\mathcal{L}(x)^{-c}, \quad x \geq 3;$$

$$(v) \quad \mu(x) = x + O(\mathcal{L}(x)^{-c}), \quad x \geq 3.$$

*Démonstration.* Le lemme 2 s'applique avec :

$$A(x) = M_1 \log \log 3x, \quad B(x) = M_2, \quad C(u) = e^{-bu},$$

où  $M_1$  et  $M_2$  sont des constantes positives. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \int_1^x \sum_{n \geq 0} \frac{(d\alpha)^{*n}}{n!} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n(x)}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n \leq K} + \sum_{n > K}, \end{aligned}$$

où  $K$  est un paramètre, choisi ultérieurement.

Nous avons pour  $n \geq 1$ ,

$$\frac{|\alpha_n(x)|}{n!} \ll \frac{(M_1 \log \log 3x + O(1))^{n-1}}{(n-1)!} e^{-b \frac{\log x}{n}}.$$

La formule de Stirling et un calcul facile montrent que cette dernière quantité est maximale pour

$$n = \sqrt{(2b + o(1)) \frac{\log x}{\log \log x}}$$

et est donc, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\ll \mathcal{L}(x)^{-\sqrt{2b+o(1)}}.$$

Si nous choisissons  $K = \log x$ , par exemple, cette dernière estimation se transmet à  $\sum_{n \leq K}$ . Quant au reste, il est

$$\ll \sum_{n > \log x} \frac{(M_1 \log \log 3x + O(1))^{n-1}}{(n-1)!} \ll \exp(-(1+o(1)) \log x \log \log x)$$

donc négligeable : l'assertion (iii) est démontrée.

L'assertion (iv) résulte d'une simple intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^x t d\beta(t) &= x\beta(x) - \int_1^x \beta(t) dt \\ &\ll x\mathcal{L}(x)^{-\sqrt{2b}+o(1)} + \int_1^x \mathcal{L}(t)^{-\sqrt{2b}+o(1)} dt \\ &\ll x\mathcal{L}(x)^{-\sqrt{2b}+o(1)}. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'assertion (v) nous employons de nouveau la méthode de l'hyperbole :

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \int_1^y \gamma\left(\frac{x}{t}\right) dN_1(t) + \int_1^{x/y} N_1\left(\frac{x}{t}\right) d\gamma(t) - N_1(y)\gamma\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \sum_{n \leq y} \gamma\left(\frac{x}{n}\right) + x\beta\left(\frac{x}{y}\right) + O(\|d\gamma\|_{x/y}) + O(x\mathcal{L}(x/y)^{-\sqrt{2b}+o(1)}) \end{aligned}$$

d'après (iv) et l'égalité

$$N_1\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t} + O(1).$$

Or

$$\|d\gamma\|_z = \int_1^z |td\beta(t)| = \int_1^z t|d\beta|(t) \leq z\|d\beta\|_z \leq ze^{\|d\alpha\|_z} \leq z(\log 3z)^{M_1},$$

pour  $z \geq 1$ . Par suite, en utilisant (iii) et (iv),

$$\mu(x) = x + O(x(\log y)\mathcal{L}(x/y)^{-\sqrt{2b}+o(1)}) + O(x(\log 3x)^{M_1}/y).$$

En choisissant  $y = x^\varepsilon$  avec  $\varepsilon$  positif assez petit, on obtient l'assertion (v).  $\square$

Nous pouvons maintenant achever de démontrer le théorème 9. Soit  $N_2$  la fonction de comptage des nombres entiers généralisés engendrés par la suite  $\beta$ . En utilisant les notations des lemmes 4 et 5, posons :

$$\begin{aligned} d(\Pi_2 - \Pi_1) &= (\log D)\delta + d\lambda, \\ d\alpha(t) &= \frac{d\lambda(t)}{t}, \end{aligned}$$

de sorte que, d'une part,

$$\begin{aligned} \|d\alpha\|_x &\leq \int_1^x \frac{1}{t} (|\log D|\delta + d\Pi_2 + d\Pi_1)(t) \\ &\leq 2 \log \log(3x) + O(1), \end{aligned}$$

et d'autre part (lemme 4),

$$\alpha(x) \ll x^{a-1}.$$

Or,

$$dN_2 = e^{d\Pi_2} = e^{d\Pi_1} * e^{d\Pi_2 - d\Pi_1} = dN_1 * e^{(\log D)\delta + d\lambda} = DdN_1 * d\gamma$$

où  $d\gamma(t) = te^{d\alpha}(t)$ . Le théorème résulte donc de l'assertion (v) du lemme 5.

#### REMERCIEMENTS

Je remercie : Gautami Bhowmik et Olivier Ramaré pour avoir suscité l'écriture de ce texte en m'invitant à participer au colloque de décembre 1997 à Lille, "Fonctions zêta et énumération"; Harold Diamond pour d'intéressantes suggestions et indications, notamment concernant le théorème 6; et Éric Saias pour d'utiles remarques.

#### RÉFÉRENCES

- [1] BALANZARIO, E. P. On Beurling's theory of generalized primes. Ph. D. thesis, Univ. of Illinois, Urbana-Champaign, 1997.
- [2] BALAZARD, M. Une remarque sur la fonction d'Euler. *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) 47 (1998), 325–330.
- [3] BALAZARD, M. et G. TENENBAUM. Sur la répartition des valeurs de la fonction d'Euler. *Compositio Math.* 110 (1998), 239–250.
- [4] BATEMAN, P. T. et H. G. DIAMOND. Asymptotic distribution of Beurling's generalized prime numbers. In: *Studies in Number Theory* (W. J. LeVeque, editor), *MAA Studies in Mathematics* 6 (1969), 152–210.
- [5] BEURLING, A. Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés, I. *Acta Math.* 68 (1937), 255–291.
- [6] DIAMOND, H. G. Characterization of derivations on an algebra of measures, II. *Math. Z.* 105 (1968), 301–306.
- [7] — Asymptotic distribution of Beurling's generalized integers. *Illinois J. Math.* 14 (1970), 12–28.
- [8] — When do Beurling generalized integers have a density? *J. reine angew. Math.* 295 (1977), 22–39.
- [9] LEJEUNE DIRICHLET, G. Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie. In: *Mathematische Werke*, vol. 2, 49–66. Berlin, 1897. (Reprinted by Chelsea Publ. Co.)
- [10] HALL, R. S. The prime number theorem for generalized primes. *J. Number Theory* 4 (1972), 313–320.