6.3 La formule des traces semi-classiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

6.3 La formule des traces semi-classiques

Cette formule s'étend en une formule asymptotique (appellée formule de traces de Gutzwiller dans la littérature) valable en toute généralité (en particulier sans aucune hypothèse de type chaos classique, le cas complètement intégrable étant une conséquence de la formule sommatoire de Poisson) à condition de prendre ρ telle que $\hat{\rho}$ soit à support compact, ce qui revient à ne considérer la dynamique de l'équation de Schrödinger que sur un intervalle borné en temps et donc une contribution d'un nombre fini de géodésiques périodiques, en vertu de la formule d'inversion de Fourier :

$$\frac{1}{h}\rho\Big(\frac{E-\widehat{H}}{h}\Big) = \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbf{R}} e^{itE/h}e^{-itH/h}\widehat{\rho}(t)\,dt\,.$$

Donnons un énoncé assez précis pour l'équation de Schrödinger.

Théorème 1. *Soit E une énergie non critique pour l'hamiltonien classique H, $\chi \in C_o^\infty(\mathbf{R})$ égale à 1 près de E et $\rho(E)$ une fonction dont la transformée de Fourier est à support dans $|t| < T$.*

On suppose que les trajectoires périodiques γ de $\mathcal{X}_H$ contenues dans $\{H = E\}$ sont non dégénérées *au sens que l'application de Poincaré linéaire P_γ n'admet pas* 1 *comme valeur propre. Soit $T'_\gamma > 0$ la plus petite période de γ et m_γ l'indice de Morse de γ comme courbe fermée et $\epsilon_\gamma = O$ ou* 1.

Alors :

$$\sum_j \chi(E_j)\frac{1}{h}\rho\Big(\frac{E-E_j}{h}\Big) = N_W(E) + \sum_\gamma N_\gamma(E)\,, \tag{6.1}$$

où

$$N_W(E) = C(E)h^{-(n-1)}(1+O(h)) \tag{6.2}$$

et

$$N_\gamma(E) = \frac{1}{2\pi h}\frac{T'_\gamma}{(\det(1-P_\gamma))^{1/2}}e^{\frac{i}{h}\int_\gamma \xi dx - i(m_\gamma+\epsilon)\frac{\pi}{2}}(1+O(h))\,. \tag{6.3}$$

La justification heuristique la plus simple est liée à l'intégrale de Feynman; donnons-la : le propagateur quantique

$$p(t,x,y)$$

noyau intégral de l'opérateur $U(t) = e^{-itH/\hbar}$ est donné selon Feynman ([27]) comme une superposition d'amplitudes associées aux différents chemins $\gamma \in \Omega_{x,y,t}$ qui est l'ensemble de chemins (γ: $[0,t] \to X$ tels que $\gamma(0)=x,\ \gamma(t)=y$):

$$p(t,x,y) = \int_{\Omega_{x,y,t}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s),\gamma'(s))\,ds} |d\gamma|,$$

où $\mathcal{L}$: $TX \to \mathbf{R}$ est le lagrangien classique. Dans le cas des géodésiques, le lagrangien est l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\|\gamma'\|^2$.

Si Ω_t désigne maintenant l'espace des lacets fermés parcouru en le temps t, on obtient la fonction de partition quantique:

$$Z(t) = \sum e^{-itE_j/\hbar} = \int_X p(t,x,x)dx = \int_{\Omega_t} e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s),\gamma'(s))\,ds} |d\gamma|,$$

comme une intégrale sur les *lacets*. L'application de la phase stationnaire, lorsque $\hbar$ tend vers 0, fait apparaitre les trajectoires fermées comme points critiques de $\Phi(\gamma) = \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s),\gamma'(s))\,ds$ sur Ω_t.

Dans le cas de Selberg, il se trouve que, bien que la surface X puisse être compliquée, l'espace Ω_t se décompose en composantes connexes simples, une par géodésique périodique et que la décomposition de $Z(t)$ en somme d'intégrales sur ces composantes connexes permet de prévoir une formule sommatoire exacte.

La formule de traces semi-classiques donne certes des informations sur le spectre, mais elle a surtout une application aux problèmes inverses. Par exemple dans le cas riemannien, elle montre que le spectre du laplacien détermine le spectre des longueurs des géodésiques périodiques.

La fonction ζ de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} (1-\frac{1}{p^s})^{-1}, \quad \Re(s) > 1,$$

s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ ayant des zéros aux entiers pairs < 0. Riemann a fait l'hypothèse selon laquelle les autres zéros satisfont $\Re(s) = 1/2$. Cette hypothèse centrale en théorie des nombres est restée improuvée depuis environ 150 ans.

Il existe des formules sommatoires ayant une analogie formelle avec celle de Selberg pour ces zéros. A. Connes [22] vient de proposer un hamiltonien quantique dont le spectre serait donné par ces zéros et ainsi une voie d'attaque de l'hypothèse de Riemann.