2.1 GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

2. La mécanique classique

Pour cette section, voir [1], [3], [4], [28], [44], [48], [49], [50], [51].

2.1 Géométrie symplectique

L'espace des phases du système est une variété symplectique (Z,ω). La plupart du temps, c'est un cotangent $T^\star X$ équipé de la structure canonique. Ce peut être aussi une sous-variété algébrique lisse du projectif complexe équipé de la structure symplectique partie imaginaire de la structure kaehlérienne ou une variété obtenue par réduction symplectique à partir des précédentes.

On se donne ensuite une fonction $H\colon Z \to \mathbf{R}$, l'hamiltonien du système. On lui associe le champ de vecteurs $\mathcal{X}_H$, gradient symplectique de H, qui donne la dynamique. Il est classique que la dynamique du système décrite par le flot ϕ_t de $\mathcal{X}_H$ préserve H et la forme ω.

Les exemples de base sont

Exemple 2.1. *$Z = T^\star \mathbf{R}^n$ et*

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 + V(x)\,,$$

la dynamique étant celle d'une particule dans le potentiel V, et ξ étant l'impulsion.

Exemple 2.2. *$Z = T^\star X$ où X est une variété riemannienne de métrique g et*

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2}g^\star(\xi)\,,$$

où $g^\star$ est la métrique associée à g sur le cotangent donnée en coordonnées locales par l'inverse de $(g_{i,j})$ avec $g = ds^2 = \sum g_{i,j}\,dx_i\,dx_j$.

La dynamique est alors celle du flot géodésique.

Exemple 2.3. *$Z = P^n\mathbf{C}$ est muni d'une structure symplectique (à peu près) canonique, associée à une structure hermitienne sur $\mathbf{C}^{n+1}$: on considère la sphère unité de $\mathbf{C}^{n+1}$ pour cette métrique hermitienne. La structure symplectique de $\mathbf{C}^{n+1}$, partie imaginaire de la forme hermitienne, induit une 2-forme sur cette sphère dont le noyau est constitué par l'action infinitésimale de $U(1)$. Le quotient de cette action est $P^n\mathbf{C}$ qui est ainsi symplectisé.*

L'objet le plus central en géométrie symplectique est sans doute la *variété lagrangienne*.

Une sous-variété lagrangienne L d'une variété symplectique (Z,ω) de dimension $2n$ est une sous-variété isotrope pour la forme ω et de dimension n. Si $Z = T^\star X$ et si L est le graphe d'une section (et s'identifie donc à la donnée d'une 1-forme sur X), L est lagrangienne si et seulement si la 1-forme correspondante est fermée. Si $L = (x, S'(x))$, on dit que S est une fonction génératrice. Si $p\colon L \to X$ est la projection, la *caustique* de L est le sous-ensemble de L formé des points où la projection est critique. Il est important pour la suite d'étendre la notion de fonction génératrice au cas des caustiques : cela remonte à Maslov et Hörmander. On peut déjà en trouver l'idée dans Huygens et Feynman.

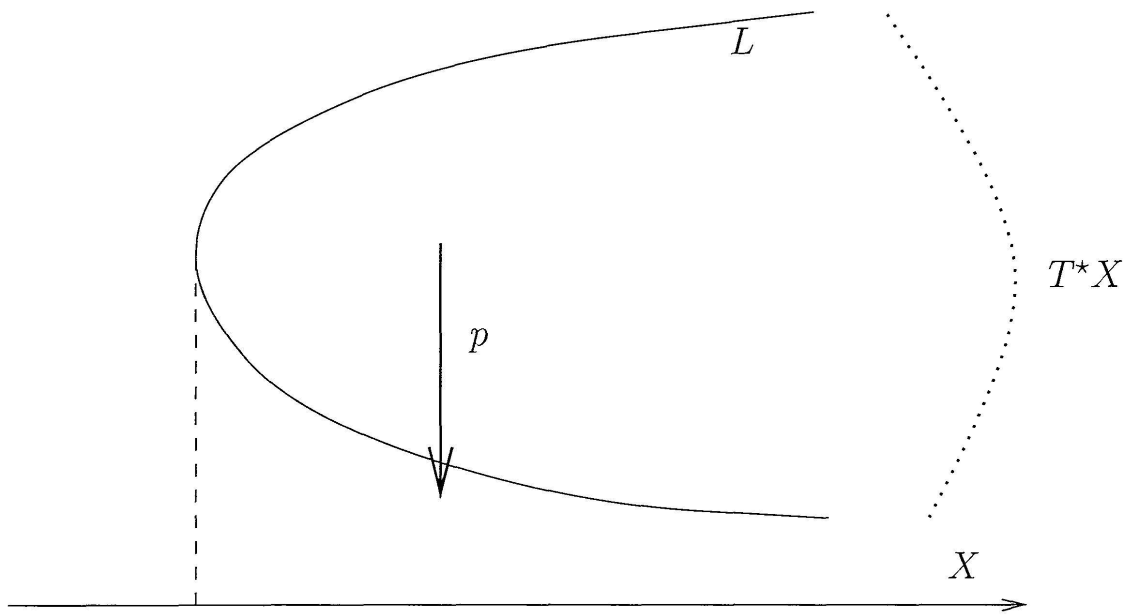

FIGURE 1
Variétés lagrangiennes et caustiques

La notion de variété lagrangienne permet de généraliser la notion de solution d'une EDP non linéaire du type :

$$H(x, S'(x)) = 0\,.$$

L'équation de Hamilton-Jacobi

$$S'_t + H(x, S'_x) = 0$$

et l'équation eiconale de l'optique

$$\|S'\|^2 = 1$$

en sont des cas particuliers.

Une telle solution généralisée est simplement une variété lagrangienne de $T^{\star}X$ contenue dans $H = 0$.

On voit facilement que le champ $\mathcal{X}_H$ est tangent à une telle variété. Bien sûr, en général, il y a des caustiques (enveloppe des trajectoires).

Une autre notion importante attachée à une sous-variété lagrangienne L de $T^{\star}X$ est celle de fronts d'ondes : ce sont les feuilles du feuilletage défini par la restriction à L de la 1-forme de Liouville $\alpha = \xi dx$. Leurs projections sur X sont aussi appellées fronts d'ondes.

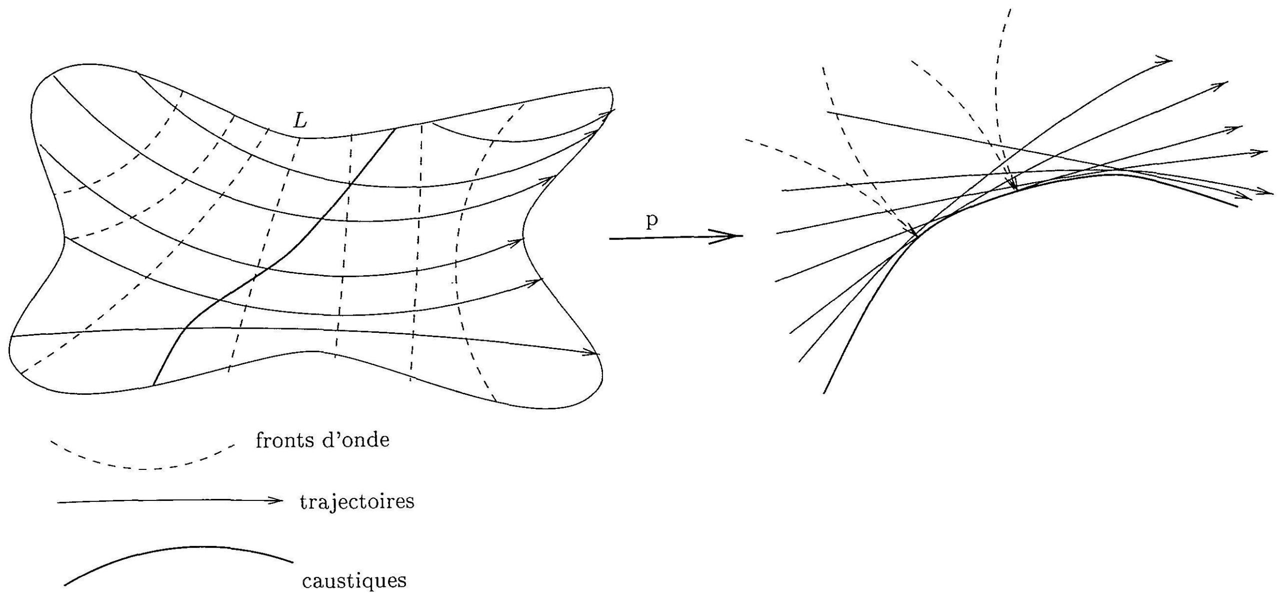

FIGURE 2

Variété lagrangienne et fronts d'ondes

2.2 VARIÉTÉS LAGRANGIENNES ET FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Une variété lagrangienne a en général des caustiques et ne peut donc pas être représentée par une fonction génératrice naïve. On a recours à une famille de fonctions $\varphi(x, \theta)$, $\theta \in \mathbf{R}^N$. Si on considère les fronts d'ondes $F_{\theta,a} = \{x \mid \varphi(x, \theta) = a\}$, leur enveloppe est donnée classiquement comme l'ensemble des solutions de $\varphi = a$, $\partial_\theta \varphi = 0$. A cette enveloppe est associée l'ensemble des $(x, \partial_x \varphi)$ qui se trouve être, sous des hypothèses de non-dégénérescence, une variété lagrangienne. On retrouve une construction d'Huygens : l'enveloppe d'une famille de fronts d'ondes est un nouveau front d'onde.

C'est un théorème que toute variété lagrangienne admet une représentation de ce type. Une telle famille est du reste unique à des opérations élémentaires près : c'est un théorème dû à Hörmander.