1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 44 (1998), p. 9–22

AN ASYMPTOTIC FREIHEITSSATZ FOR FINITELY GENERATED GROUPS

by Pierre-Alain CHERIX*) and Gilles SCHAEFFER

ABSTRACT. Given two fixed integers $k \geq 2$ and $l \geq 3$, let $\Gamma = \langle X \mid R \rangle$ be a presentation of the group Γ with $k = \#X$ generators and $l = \#R$ relations. We show that the following property of presentations of groups is generic in the sense of Gromov: for any $y \in X$, the subgroup of Γ generated by $X - \{y\}$ is free of rank $k-1$. This gives some generic estimates for the spectral radius of the adjacency operator in the Cayley graph of Γ relative to the generating system $S = X \cup X^{-1}$.

1. INTRODUCTION

The existence of free subgroups in some finitely generated group Γ gives some information about the structure of Γ. For example, it implies that Γ is non-amenable, and in particular that Γ has exponential growth. There are several results which ensure that various groups do have non-abelian free subgroups. For example:

THEOREM (Tits's alternative [15]). *Let Γ be a finitely generated linear group. Then either Γ is almost solvable or Γ contains a free subgroup on two generators.*

*) Le premier auteur est supporté par une bourse "Jeune chercheur" du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique et a effectué ce travail à l'université de New South Wales.

THEOREM (Magnus's Freiheitssatz [12]). *Let $\Gamma = \langle X | r \rangle$ be a one relator group, $x_0 \in X$ be a generator of Γ that appears in the relation r and r be a cyclically reduced word in the free group $\mathbf{F}_X$ generated by X; then $X - \{x_0\}$ freely generates a free group in Γ.*

Our purpose in this work is to measure in some sense how frequent it is for a presentation $\Gamma = \langle X | R \rangle$ to be such that a proper subset of X is free in Γ. We prove the following result:

THEOREM 1.1. *Let $\Gamma = \langle X | R \rangle$ be a finite presentation with k generators, l relations and any fixed x_0 in X. Then the fact that $X - \{x_0\}$ freely generates a free group in Γ is generic in the sense of Gromov.*

The key idea is contained in proposition 4.1. Roughly speaking, if you choose at random l long relations and if the presentation satisfies a Dehn algorithm, then every generator x_0 will appear in every sufficiently long subword of every relation and hence it will appear in every product of conjugates of relations. So $X - \{x_0\}$ generates a free group in Γ.

In [6], the first author has shown that "X generates a free semi-group" is generic and that this implies bounds on the spectrum of the adjacency operator associated to the oriented Cayley graph of Γ relative to X. In section 5 below, we consider the adjacency operator h_S of the Cayley graph of Γ relative to $S = X \cup X^{-1}$, and we prove similarly estimates on the norm of h_S.

After finishing this paper we discovered that a result similar to Theorem 1.1 has been proved, using different methods, by G. Arzhantseva and A. Ol′shanskii in [1]. They employed a slightly different definition of the genericity and they proved that the small cancellation condition $C'(\lambda)$ is generic with respect to this new definition.

We thank A. Valette for his useful remarks and for the proofreading of this paper.