

# 1. ÉNONCÉS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DE KATO  
POUR LES ANNEAUX LOCAUX DE DIMENSION 2

par Tamás SZAMUELY

Nous nous proposons ici de donner une exposition complète (dans le cas premier à la caractéristique résiduelle) d'un résultat de Kazuya Kato, fondamental dans la théorie des corps de classes en dimension supérieure, mais difficilement abordable dans la littérature. Il va sans dire que nous nous sommes fortement inspirés des travaux originaux ([7], [8], [9] et [14]) dont nous espérons que ce texte facilitera l'accès.

1. ÉNONCÉS

Soient  $A$  un anneau local normal complet de dimension 2,  $K$  son corps de fractions et  $\mathbf{F}$  son corps résiduel qui sera supposé *fini* dans la suite. Prenons un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de hauteur 1, et notons  $K_{\mathfrak{p}}$  le corps de fractions du hensélisé  $A_{\mathfrak{p}}^h$  de  $A$  en  $\mathfrak{p}$ . (Pour tout ce qui concerne les anneaux henséliens, voir [11] et [12].) Fixons un entier positif  $m$  premier à la caractéristique de  $\mathbf{F}$ .

THÉORÈME 1. *Pour tout premier  $p$  divisant  $m$ , la  $p$ -dimension cohomologique de  $K_{\mathfrak{p}}$  est 3, et on a un isomorphisme*

$$H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

Plus généralement, on dit qu'un corps  $F$  est un *corps local de dimension  $d$*  si  $F$  est muni d'une valuation discrète hensélienne pour laquelle son corps résiduel est un corps local de dimension  $d - 1$ , un corps local de dimension 0 étant un corps fini. Donc un corps local au sens classique est un corps local complet de dimension 1 dans notre sens, et on va voir au chap. 3 que le corps  $K_{\mathfrak{p}}$  du th. 1 est un corps local de dimension 2. Or, pour un  $m$  premier à la caractéristique du « plus petit » corps résiduel de  $F$ , on a le théorème général suivant.

THÉORÈME 1'. *Pour tout premier  $p$  divisant  $m$ , la  $p$ -dimension cohomologique de  $F$  est  $d + 1$  et on a un isomorphisme*

$$H^{d+1}(F, \mu_m^{\otimes d}) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

Pour  $d = 1$ , on récupère la détermination classique de la  $m$ -torsion du groupe de Brauer d'un corps local (cf. par exemple [16], [17]). Le groupe du th. 1 joue donc un rôle analogue à celui du groupe de Brauer dans le cas classique.

Revenons maintenant à notre corps  $K$ , et soit  $\omega \in H^3(K, \mu_m^{\otimes 2})$ ,  $\omega_p$  sa restriction à  $H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2})$ . On va voir au chap. 4 que  $\omega_p = 0$  pour presque tout  $p$ , on obtient donc un homomorphisme

$$H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_p H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_p \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

où  $p$  parcourt les idéaux premiers de hauteur 1 dans  $A$ . En faisant la somme suivant ces  $p$ , on obtient l'analogie suivant de la loi de réciprocité classique de Takagi-Artin (pour cette dernière, cf. [18]):

THÉORÈME 2. *La suite d'homomorphismes*

$$H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_p H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$$

*est un complexe.*

REMARQUE. Tout comme le th. 1, le th. 2 admet une généralisation en dimension supérieure qui se démontre essentiellement de la même façon: supposons en fait que le corps résiduel  $\mathbf{F}$  de notre anneau  $A$  est un corps local de dimension  $d - 2$  pour un  $d \geq 2$ . Alors on a un complexe, avec les mêmes notations:

$$H^{d+1}(K, \mu_m^{\otimes d}) \rightarrow \bigoplus_p H^{d+1}(K_p, \mu_m^{\otimes d}) \rightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

Ces théorèmes sont dus à Kazuya Kato. En fait, il a démontré beaucoup plus, car il a également traité le cas où l'entier  $m$  est divisible par la caractéristique résiduelle. Ce cas, qui nécessite de longs calculs sur le complexe de de Rham-Witt, ne sera pas examiné ici. Les deux chapitres qui suivent contiennent des rappels de résultats divers utilisés dans la suite, les preuves

des théorèmes 1 et 1' ainsi qu'une discussion superficielle de la position du th. 2 dans la théorie des corps de classes des schémas arithmétiques. Le reste de l'article est consacré à la démonstration de ce théorème.

## 2. PRÉPARATION

On rappelle ici quelques résultats en cohomologie galoisienne; une référence de base est le livre de Serre [15].

Si  $G$  est un groupe profini,  $I$  un sous-groupe normal fermé dans  $G$ , on a pour tout  $G$ -module discret  $A$  la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{i,j} = H^i(G/I, H^j(I, A)) \Rightarrow H^{i+j}(G, A).$$

La théorie générale des suites spectrales nous fournit maintenant le

LEMME 2.1. *Si  $A$  est un module de torsion et  $I$  est de dimension cohomologique 1, il existe un homomorphisme*

$$\partial_i : H^{i+1}(G, A) \rightarrow H^i(G/I, H^1(I, A))$$

*appelé le résidu. Si, de plus,  $G/I$  est de dimension cohomologique  $i$ , cet homomorphisme est en fait un isomorphisme.*

REMARQUE. En fait, pour  $A$  fixé, il suffit de supposer que  $I$  soit de  $p$ -dimension cohomologique 1 pour chaque  $p$  annulant un élément de  $A$ ; de même pour l'énoncé sur  $G/I$ .

Un calcul sur les cochaînes (cf. par exemple [5], p. 77 ainsi que [13], Appendice A) montre la compatibilité suivante entre résidus et cup-produits.

LEMME 2.2. *Soient  $G$  et  $I$  comme ci-dessus,  $A$  et  $B$  deux  $G$ -modules discrets de torsion. Alors pour tout  $a \in H^i(G, A)$ ,  $b \in H^j(G/I, H^0(I, B))$ ,*

$$\partial_{i+j-1}(a \cup \text{Inf}_{G/N}^G(b)) = \partial_{i-1}(a) \cup b.$$

La démonstration du théorème 1' est une application simple du lemme 2.1.

*Démonstration du théorème 1'.* On sait que pour un corps muni d'une valuation discrète hensélienne, le sous-groupe d'inertie du groupe de Galois absolu est de  $p$ -dimension cohomologique 1 pour tout premier  $p$  différent