

3. Similarities Normalise

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

- (ii) $S = \{F \in M_d(\mathbf{Q}) \mid F = F^{tr}, F \text{ positive definite}\}$, the set of positive definite symmetric matrices, where x^{tr} denotes the transposed matrix of $x \in M_d(\mathbf{Q})$ and the action of H on S is $S \times H \rightarrow S$, $(F, h) \mapsto hFh^{tr}$. Then the set of G -fixed points is

$$\mathcal{F}_{>0}(G) := \{F \in S \mid gFg^{tr} = F \text{ for all } g \in G\}.$$

Note that $(\mathbf{R}_{>0})\mathcal{F}_{>0}(G)$ is the set of G -invariant Euclidean scalar products on \mathbf{R}^d . G is called *uniform*, if there is essentially one G -invariant Euclidean structure on \mathbf{R}^d , that is if $\mathcal{F}_{>0}(G) = \{aF \mid 0 < a \in \mathbf{Q}\}$ for some $F \in M_d(\mathbf{Q})$.

- (iii) $S = M_d(\mathbf{Q})$, and the action of H is conjugation: $S \times H \rightarrow S$, $(c, h) \mapsto h^{-1}ch$. Then the set of G -fixed points is the *commuting algebra* of G

$$C_{M_d(\mathbf{Q})}(G) := \{c \in M_d(\mathbf{Q}) \mid cg = gc \text{ for all } g \in G\}.$$

The following two remarks follow immediately from the normaliser principle.

REMARK 1. Assume that G is uniform and let $F \in \mathcal{F}_{>0}(G)$. Then for each $n \in N$, the matrix nFn^{tr} is also G -invariant and therefore $nFn^{tr} = (\det(n))^{2/d}F$. Hence n induces a similarity of F .

REMARK 2. For $n \in N$ and $L \in \mathcal{Z}(G)$, the lattice $Ln \in \mathcal{Z}(G)$ is also G -invariant.

3. SIMILARITIES NORMALISE

In this section we show that if G is the automorphism group of a (strongly modular) lattice L then the similarities between L and $L' \in \pi(L)$ are elements of N .

PROPOSITION 3. Let $G = \text{Aut}(F) \leq GL_d(\mathbf{Z})$ be the full automorphism group of a lattice L . Assume that L is an integral lattice. Let $L' \in \pi(L)$ and $n \in GL_d(\mathbf{Q})$ which induces a similarity from L' to L , i.e. $L'n = L$ and $nFn^{tr} = aF$, ($a \in \mathbf{N}$). Then $a^{-1}n^2 \in G$ and $n \in N$.

Proof. The matrix $a^{-1}n^2$ is clearly orthogonal with respect to F . Therefore to prove that $a^{-1}n^2 \in G$ we only have to show that $La^{-1}n^2 = L$. Now $L' = Ln^{-1}$, hence its dual lattice is

$$(L')^\# = \{v \in \mathbf{Q}^d \mid vF(ln^{-1})^{tr} \in \mathbf{Z} \text{ for all } l \in L\}.$$

For $l \in L, v \in \mathbf{Q}^d$ we have $vF(ln^{-1})^{tr} = va^{-1}nFl^{tr}$ and hence $(L')^\# = L^\#an^{-1}$.

Since $L' \in \pi(L)$ one has $L' = L^\# \cap a^{-1}L$. Using this one obtains

$$Lan^{-2} = L'an^{-1} = L^\#an^{-1} \cap Ln^{-1} = (L')^\# \cap L' = L,$$

since $(L')^\#/L$ is the orthogonal complement of L'/L in $L^\#/L$ with respect to the induced quadratic form with values in \mathbf{Q}/\mathbf{Z} . So $a^{-1}n^2 \in G$.

Finally we check that $n \in N$. Let $g \in G$, then $n^{-1}gn$ is in $G = \text{Aut}(F)$ since $Ln^{-1}gn = L'gn = L'n = L$ and

$$n^{-1}gnFn^{tr}g^{tr}n^{-tr} = n^{-1}agFg^{tr}n^{-tr} = F. \quad \square$$

4. OBTAINING ELEMENTS OF N

Now we give examples as to how one may construct elements n of the normaliser N . To obtain similarities we are interested in $n \in N$ of determinant $\pm p^{d/2}$ for some (squarefree) natural number p such that $p^{-1}n^2 \in G$. The first method is an application of the normaliser principle to the situation (iii) described in Section 2:

PROPOSITION 4. *Let $U \trianglelefteq G$ be a normal subgroup of G and assume that the commuting algebra $K := C_{M_d(\mathbf{Q})}(U)$ is isomorphic to a number field. If $c \in K$ satisfies $c^2 = p \in \mathbf{Q}^*I_d$, then c lies in N .*

Proof. Since G normalises U , it acts by conjugation (and hence as Galois automorphisms) on the abelian number field K . Now let $c \in K$, with $c^2 =: p \in \mathbf{Q}^*I_d$ and $g \in G$. Then g stabilises the subfield $\mathbf{Q}[c]$ and hence $g^{-1}cg = \pm c$, which is equivalent to $c^{-1}gc = \pm g \in G$. Therefore $c \in N$, since we assumed that $-I_d \in G$. \square

The following construction described in [PIN 95] Proposition (II.4) also allows us to find elements of N .

For $i = 1, 2$ let $G_i \leq GL_{d_i}(\mathbf{Q})$ be finite rational irreducible matrix groups with commuting algebras $A_i \subseteq M_{d_i}(\mathbf{Q})$. Also let Q be a maximal common subalgebra of dimension z of A_1 and A_2 . Let $d := \frac{d_1d_2}{z}$ and view the G_i as subgroups of $G_1 \otimes_Q G_2 \leq GL_d(\mathbf{Q})$. If there exist elements $a_i \in N_{GL_d(\mathbf{Q})}(G_i)$