4. Un corollaire et plus d'exemples

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

4. Un corollaire et plus d'exemples

COROLLAIRE 4.1. *Soit $T \in \mathbf{T}_{3,3}$. On suppose qu'il existe un plan $H \subset \mathbf{P}^3$ dont le transformé strict est lisse. Alors, T est déterminantielle.*

Preuve. On observe qu'on peut supposer le plan H générique. En particulier T n'est pas réglée et donc, par le théorème, il suffit de démontrer que T n'est pas de de Jonquières.

On note S le transformé strict de H et Γ le système linéaire sur S défini par les transformées strictes des droites contenues dans H. Par le théorème de Bertini ([6, chap. III, rem. 10.9.1]), un élément générique de Γ ne peut avoir de singularités que sur l'ensemble des points base de Γ. Puisque cet ensemble est fini, si T était de de Jonquières, il existerait $P \in S$ tel que l'élément générique de Γ serait une section plane de S singulière en P : puisque Γ a dimension deux, ceci contredit que S soit lisse. $\square$

REMARQUE. La preuve du corollaire montre que pour une transformation de de Jonquières, le transformé strict d'un plan générique possède un point double qui, par le théorème de Bertini, sera fixe si T n'est pas réglée.

Si $T\colon \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ est une application rationnelle, le *schéma de base $B(T)$ de T* est, par définition, le sous-schéma de $\mathbf{P}^3$ défini par l'idéal $\mathcal{I}(T)$.

EXEMPLE 4.2. Si T est une transformation de Cremona telle que $B(T)$ est une courbe (réduite) irréductible et lisse, alors $T \in \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3}$: en utilisant [4, exemple 2], c'est un cas particulier de [12]; voir aussi [7, chap. XIV, § 11].

EXEMPLE 4.3. Si $T' = [f_0, f_1, f_2, f_3] \in \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3}$, on a un complexe

$$0 \longrightarrow A^3(-4) \xrightarrow{M} A^4(-3) \xrightarrow{(f_0, f_1, f_2, f_3)} \mathcal{I}(T') \longrightarrow 0,$$

où M est une matrice dont les mineurs maximaux définissent T'. Par [14, chap. X, lemme 2.7] ou le théorème de Buchsbaum-Eisenbud [2, thm. 1.4.12], ce complexe est exact.

EXEMPLE 4.4. La transformation T de l'exemple 1.2 n'est pas déterminantielle. D'après l'exemple ci-dessus, il suffit de monrer que $\mathcal{I}(T)$ possède la résolution minimale

$$0 \longrightarrow A(-5) \xrightarrow{\varphi_0} A^3(-4) \oplus A(-5) \xrightarrow{\varphi_1} A^4(-3) \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0,$$

où

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & -z & y & -a \\ z & 0 & -x & -b \\ -y & x & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = (xq, yq, zq, g)$$

et

$$g = ax + by + cz\,.$$

En effet, il est clair que $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_2)$; réciproquement, puisque $\mathrm{pgcd}(q, g) = 1$ et x, y, z est une suite A-régulière, on a

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\varphi_2) \iff (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)q + \alpha_4 g = 0$$

$$\iff \exists\, \beta_4 \in A : \begin{cases} \alpha_4 = \beta_4 q, \text{ et} \\ (\alpha_1 + \beta_4 a)x + (\alpha_2 + \beta_4 b)y \\ \qquad + (\alpha_3 + \beta_4 c)z = 0 \end{cases}$$

$$\implies \exists \beta := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} : \ \varphi_1(\beta) = \alpha\,,$$

d'où $\mathrm{Im}(\varphi_1) \supset \mathrm{Ker}(\varphi_2)$; en utilisant encore une fois que x, y, z est une suite A-régulière, on obtient $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Im}(\varphi_0)$; enfin φ_0 est banalement injective.

REMARQUE. Pour finir, on donne (sans démonstration) quelques précisions sur les sous-ensembles $\mathbf{T}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3}$ et $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3}$ (voir [13]) :

1. $\mathbf{T}_{3,3}$ *est un sous-ensemble constructible et connexe de dimension* 39, *dans la variété quasi-projective des applications rationnelles de degré* 3.
2. $\mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3}$ *et* $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3}$ *sont des sous-ensembles constructibles et irréductibles de dimensions* 39, 38 *et* 31 *respectivement, avec* $\mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \cap \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3} = \varnothing$.
3. *Soit* $T \in \mathbf{T}_{3,3}{}^{*}$, *où* $* \in \{D, J, R\}$; *notons* $p_{B(T)}$ *le polynôme de Hilbert de* $B(T)$. *Alors, on a des résolutions minimales de la forme :*
   (a) *pour* $* = D$,

$$0 \longrightarrow A^3(-4) \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0\,;$$

en particulier

$$p_{B(T)}(t) = 6t - 2\,.$$

(b) *pour* $* = J$,

$$0 \longrightarrow A(-5) \longrightarrow A^3(-4) \oplus A(-5) \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0\,;$$

en particulier

$$p_{B(T)}(t) = 6t - 2\,.$$

(c) *pour* $* = R$ *et* T *générique,*

$$0 \longrightarrow A(-6) \longrightarrow (A(-5) \oplus A(-4))^2 \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0\,;$$

en particulier

$$p_{B(T)} = 5t + 1\,,$$

et donc $T \not\in \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \cup \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3}$.

5. Comparaison avec les résultats classiques

Soit $T\colon \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ une transformation de Cremona; on note Λ_T le système linéaire correspondant: un élément générique de Λ_T est donc le transformé strict d'un plan générique. Si S, $S' \in \Lambda_T$ sont génériques, alors l'intersection schématique $S \cap S'$ est la réunion de la transformée stricte γ d'une droite générique et d'un 1-cycle fixe ω dont le support est contenu dans l'ensemble des points base de T; en particulier $\deg(\omega) = \deg(T)^2 - \deg(T^{-1})$. Dans le cas de bidegré (3,3) on a $\deg(\omega) = 6$, et on écrit $\omega_6 = \omega$.

Si O est un point singulier de S, pour tout $S \in \Lambda_T$, on dit:

(i) O est un *point double ordinaire* pour Λ_T si les cônes tangents en O des éléments génériques de Λ_T sont non dégénérés et sans génératrice commune;

(ii) O est un *point double de contact* pour Λ_T si les cônes tangents en O des éléments génériques de Λ_T sont non dégénérés et coïncident.

Dans [7, chap. XIV, page 295 et table VI], Hilda Hudson, qui ne considère apparemment que des situations génériques, affirme qu'il y a quatre types de transformations de bidegré (3,3). Plus précisément, elle distingue quatre cas suivant la nature du lieu des points singuliers $\Sigma(S)$ d'un élément générique $S \in \Lambda_T$ et celle de ω_6 (on indique entre parenthèses le type correspondant à notre définition 1.1):