

## 4. Un corollaire et plus d'exemples

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 4. UN COROLLAIRE ET PLUS D'EXEMPLES

COROLLAIRE 4.1. *Soit  $T \in \mathbf{T}_{3,3}$ . On suppose qu'il existe un plan  $H \subset \mathbf{P}^3$  dont le transformé strict est lisse. Alors,  $T$  est déterminantielle.*

*Preuve.* On observe qu'on peut supposer le plan  $H$  générique. En particulier  $T$  n'est pas réglée et donc, par le théorème, il suffit de démontrer que  $T$  n'est pas de de Jonquières.

On note  $S$  le transformé strict de  $H$  et  $\Gamma$  le système linéaire sur  $S$  défini par les transformées strictes des droites contenues dans  $H$ . Par le théorème de Bertini ([6, chap. III, rem. 10.9.1]), un élément générique de  $\Gamma$  ne peut avoir de singularités que sur l'ensemble des points base de  $\Gamma$ . Puisque cet ensemble est fini, si  $T$  était de de Jonquières, il existerait  $P \in S$  tel que l'élément générique de  $\Gamma$  serait une section plane de  $S$  singulière en  $P$  : puisque  $\Gamma$  a dimension deux, ceci contredit que  $S$  soit lisse.  $\square$

REMARQUE. La preuve du corollaire montre que pour une transformation de de Jonquières, le transformé strict d'un plan générique possède un point double qui, par le théorème de Bertini, sera fixe si  $T$  n'est pas réglée.

Si  $T: \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$  est une application rationnelle, le schéma de base  $B(T)$  de  $T$  est, par définition, le sous-schéma de  $\mathbf{P}^3$  défini par l'idéal  $\mathcal{I}(T)$ .

EXEMPLE 4.2. Si  $T$  est une transformation de Cremona telle que  $B(T)$  est une courbe (réduite) irréductible et lisse, alors  $T \in \mathbf{T}_{3,3}^D$  : en utilisant [4, exemple 2], c'est un cas particulier de [12]; voir aussi [7, chap. XIV, § 11].

EXEMPLE 4.3. Si  $T' = [f_0, f_1, f_2, f_3] \in \mathbf{T}_{3,3}^D$ , on a un complexe

$$0 \longrightarrow A^3(-4) \xrightarrow{M} A^4(-3) \xrightarrow{(f_0, f_1, f_2, f_3)} \mathcal{I}(T') \longrightarrow 0,$$

où  $M$  est une matrice dont les mineurs maximaux définissent  $T'$ . Par [14, chap. X, lemme 2.7] ou le théorème de Buchsbaum-Eisenbud [2, thm. 1.4.12], ce complexe est exact.

EXEMPLE 4.4. La transformation  $T$  de l'exemple 1.2 n'est pas déterminantielle. D'après l'exemple ci-dessus, il suffit de montrer que  $\mathcal{I}(T)$  possède la résolution minimale

$$0 \longrightarrow A(-5) \xrightarrow{\varphi_0} A^3(-4) \oplus A(-5) \xrightarrow{\varphi_1} A^4(-3) \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0,$$

où

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & -z & y & -a \\ z & 0 & -x & -b \\ -y & x & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = (xq, yq, zq, g)$$

et

$$g = ax + by + cz.$$

En effet, il est clair que  $\text{Im}(\varphi_1) \subset \text{Ker}(\varphi_2)$ ; réciproquement, puisque  $\text{pgcd}(q, g) = 1$  et  $x, y, z$  est une suite  $A$ -régulière, on a

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\varphi_2) \iff (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)q + \alpha_4 g = 0$$

$$\iff \exists \beta_4 \in A : \begin{cases} \alpha_4 = \beta_4 q, \text{ et} \\ (\alpha_1 + \beta_4 a)x + (\alpha_2 + \beta_4 b)y \\ \quad + (\alpha_3 + \beta_4 c)z = 0 \end{cases}$$

$$\implies \exists \beta := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} : \varphi_1(\beta) = \alpha,$$

d'où  $\text{Im}(\varphi_1) \supset \text{Ker}(\varphi_2)$ ; en utilisant encore une fois que  $x, y, z$  est une suite  $A$ -régulière, on obtient  $\text{Ker}(\varphi_1) = \text{Im}(\varphi_0)$ ; enfin  $\varphi_0$  est banalement injective.

REMARQUE. Pour finir, on donne (sans démonstration) quelques précisions sur les sous-ensembles  $\mathbf{T}_{3,3}$ ,  $\mathbf{T}_{3,3}^D$ ,  $\mathbf{T}_{3,3}^J$  et  $\mathbf{T}_{3,3}^R$  (voir [13]):

1.  $\mathbf{T}_{3,3}$  est un sous-ensemble constructible et connexe de dimension 39, dans la variété quasi-projective des applications rationnelles de degré 3.
2.  $\mathbf{T}_{3,3}^D$ ,  $\mathbf{T}_{3,3}^J$  et  $\mathbf{T}_{3,3}^R$  sont des sous-ensembles constructibles et irréductibles de dimensions 39, 38 et 31 respectivement, avec  $\mathbf{T}_{3,3}^D \cap \mathbf{T}_{3,3}^J = \emptyset$ .
3. Soit  $T \in \mathbf{T}_{3,3}^*$ , où  $* \in \{D, J, R\}$ ; notons  $p_{B(T)}$  le polynôme de Hilbert de  $B(T)$ . Alors, on a des résolutions minimales de la forme :
  - (a) pour  $* = D$ ,

$$0 \longrightarrow A^3(-4) \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0;$$

en particulier

$$p_{B(T)}(t) = 6t - 2.$$

(b) pour  $* = J$ ,

$$0 \longrightarrow A(-5) \longrightarrow A^3(-4) \oplus A(-5) \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0;$$

en particulier

$$p_{B(T)}(t) = 6t - 2.$$

(c) pour  $* = R$  et  $T$  générique,

$$0 \longrightarrow A(-6) \longrightarrow (A(-5) \oplus A(-4))^2 \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0;$$

en particulier

$$p_{B(T)} = 5t + 1,$$

et donc  $T \notin \mathbf{T}_{3,3}^D \cup \mathbf{T}_{3,3}^J$ .

## 5. COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS CLASSIQUES

Soit  $T: \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$  une transformation de Cremona; on note  $\Lambda_T$  le système linéaire correspondant: un élément générique de  $\Lambda_T$  est donc le transformé strict d'un plan générique. Si  $S, S' \in \Lambda_T$  sont génériques, alors l'intersection schématique  $S \cap S'$  est la réunion de la transformée stricte  $\gamma$  d'une droite générique et d'un 1-cycle fixe  $\omega$  dont le support est contenu dans l'ensemble des points base de  $T$ ; en particulier  $\deg(\omega) = \deg(T)^2 - \deg(T^{-1})$ . Dans le cas de bidegré (3,3) on a  $\deg(\omega) = 6$ , et on écrit  $\omega_6 = \omega$ .

Si  $O$  est un point singulier de  $S$ , pour tout  $S \in \Lambda_T$ , on dit:

- (i)  $O$  est un *point double ordinaire* pour  $\Lambda_T$  si les cônes tangents en  $O$  des éléments génériques de  $\Lambda_T$  sont non dégénérés et sans génératrice commune;
- (ii)  $O$  est un *point double de contact* pour  $\Lambda_T$  si les cônes tangents en  $O$  des éléments génériques de  $\Lambda_T$  sont non dégénérés et coïncident.

Dans [7, chap. XIV, page 295 et table VI], Hilda Hudson, qui ne considère apparemment que des situations génériques, affirme qu'il y a quatre types de transformations de bidegré (3,3). Plus précisément, elle distingue quatre cas suivant la nature du lieu des points singuliers  $\Sigma(S)$  d'un élément générique  $S \in \Lambda_T$  et celle de  $\omega_6$  (on indique entre parenthèses le type correspondant à notre définition 1.1):