

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a) $f \in \langle D_m(q) \rangle$;
- b) $a \in \langle D(q) \rangle$ et $f_i \in \langle D_m(q) \rangle$ pour tout $i = 1, \dots, r$;
- c) $a \in \langle D(q) \rangle$ et $q_{k(f_i)}$ est isotrope pour tout $i = 1, \dots, r$.

En particulier, on a:

COROLLAIRE. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductible et unitaire. Alors $f \in \langle D_m(q) \rangle$ si et seulement si $q_{k(f)}$ est isotrope.

Remarquons qu'il y a une forte analogie entre le théorème 1 et le résultat suivant de Knebusch [3]:

THÉORÈME 2. Soit q une forme quadratique anisotrope qui représente 1. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$, et soient $a \in k^*$, $f_i \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductibles, unitaires et distincts tels que $f = a f_1 \dots f_r$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a) $f \in G_m(q)$;
- b) $a \in G(q)$ et $f_i \in G_m(q)$ pour tout $i = 1, \dots, r$;
- c) $a \in G(q)$ et $q_{k(f_i)}$ est hyperbolique pour tout $i = 1, \dots, r$.

COROLLAIRE. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductible et unitaire. Alors $f \in G_m(q)$ si et seulement si $q_{k(f)}$ est hyperbolique.

Remarque. Si q est une forme de Pfister, alors les théorèmes 1 et 2 sont équivalents. En effet, une forme de Pfister est isotrope si et seulement si elle est hyperbolique (voir par exemple [7], chap. 2, §10 ou [4], chap. 10, §1), et les groupes $G(q_E)$ et $\langle D(q_E) \rangle$ coïncident pour toute extension E de k .

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$. On dit que f est *normé* (par rapport à q) si le coefficient du terme de plus haut degré de f appartient à $\langle D(q) \rangle$.

Une *représentation primitive* de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$ est un polynôme de la forme $q(\phi_1, \dots, \phi_n)$, avec $\phi_i \in k[X_1, \dots, X_m]$ premiers entre eux dans leur ensemble.

LEMME. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ un polynôme irréductible et normé. Supposons que f divise une représentation primitive de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$. Alors $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

Il suffit de considérer le cas où q est anisotrope. Montrons ce lemme par récurrence sur le nombre de X_i qui interviennent dans f et sur $\deg_{X_1}(f)$. Si f est constant, alors par hypothèse $f \in \langle D(q) \rangle \subset \langle D_m(q) \rangle$. Le lemme est donc vrai dans ce cas. Supposons que X_1 intervienne dans f . Le polynôme f divise $q(\phi_1, \dots, \phi_n)$, avec $\phi_i \in k[X_1, \dots, X_m]$, non tous divisibles par f . Considérons f et les ϕ_i comme des polynômes de $k(X_2, \dots, X_m)[X_1]$. Réduisons les ϕ_i modulo f , et notons $\bar{\phi}_i$ les polynômes réduits. Multiplions-les par leur dénominateur commun, lequel est un élément de $k[X_2, \dots, X_m]$, et soient ϕ'_1, \dots, ϕ'_n les polynômes de $k[X_1, \dots, X_m]$ ainsi obtenus. On a donc

$$fh = q(\phi'_1, \dots, \phi'_n)$$

avec $h, \phi'_1, \dots, \phi'_n \in k[X_1, \dots, X_m]$, et $\deg_{X_1}(\phi'_i) < \deg_{X_1}(f)$. Alors on a aussi $\deg_{X_1}(h) < \deg_{X_1}(f)$. Par hypothèse de récurrence, $h \in \langle D_m(q) \rangle$. On a donc $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

Démonstration du théorème 1.

$a) \Rightarrow c)$: Comme $f \in \langle D_m(q) \rangle$, le coefficient a du terme de plus haut degré de f est dans $\langle D(q) \rangle$. L'hypothèse entraîne aussi qu'il existe $x_1, \dots, x_s \in k[X_1, \dots, X_m]^n$ tels que $q(x_1), \dots, q(x_s)$ soient des représentations primitives de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$, et que l'on ait l'égalité

$$f = af_1 \dots f_r = q(x_1) \dots q(x_s)$$

dans $k(X_1, \dots, X_m)^* / k(X_1, \dots, X_m)^{*2}$. Comme les polynômes f_i sont irréductibles et distincts, chacun d'entre eux divise l'un des $q(x_j)$. En réduisant x_j modulo f_i , on obtient un zéro non trivial de q sur $k(f_i)$.

$c) \Rightarrow b)$: Comme $q_{k(f_i)}$ est isotrope, f_i divise une représentation primitive de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$. Par le lemme, $f_i \in \langle D_m(q) \rangle$.

$b) \Rightarrow a)$ est trivial.

4. EXTENSIONS FINIES — LE THÉORÈME DE SPRINGER

Soit $m = 1$, et notons $X = X_1$. Le corps $k(f)$ est alors une extension finie de k . Le corollaire du théorème entraîne le théorème de Springer [8]:

THÉORÈME DE SPRINGER. *Si une forme quadratique devient isotrope sur une extension de degré impair, alors elle est isotrope.*