

4. Mass distribution and Hausdorff dimension

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Proof. It suffices to assume that $I = [0, m(I)]$. The general case will then follow by a change of variables. If we use the notation $M = \text{int} \frac{m(I)}{d}$ we get

$$\begin{aligned}
 \int_I \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(y - nd) dy &\leq \sum_{m=0}^M \int_{m \cdot d}^{(m+1)d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(y - nd) dy \\
 (7) \quad &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{m \cdot d}^{(m+1)d} g(y - nd) dy = \sum_{m=0}^M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{(m-n)d}^{(m-n+1)d} g(t) dt \\
 &= \sum_{m=0}^M \|g\| = \left(1 + \text{int} \left(\frac{m(I)}{d}\right)\right) \|g\|.
 \end{aligned}$$

3. HAUSDORFF MEASURE, NET MEASURE AND HAUSDORFF DIMENSION

This section presents standard results and definitions; see for example [FAL1].

The α -dimensional Hausdorff measure of a subset A of \mathbf{R}^n is defined by

$$(8) \quad H^\alpha(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^\alpha,$$

where $\{U_i\}_1^\infty$ is a covering of A with $|U_i| < \delta$, $i = 1, 2, \dots$, and the infimum is taken over all such coverings. The unique number α_0 such that $\alpha < \alpha_0$ implies $H^\alpha(A) = +\infty$ and $\alpha_0 < \alpha$ implies $H^\alpha(A) = 0$ is by definition the Hausdorff dimension of A .

The net measure $M^\alpha(A)$ of A is defined similarly except that the coverings $\{U_i\}$ consist of closed dyadic cubes. It follows that there exists a constant $c_1 > 0$ such that

$$(9) \quad c_1 M^\alpha(A) \leq H^\alpha(A) \leq M^\alpha(A).$$

Since $M^\alpha(A)$ and $H^\alpha(A)$ must therefore yield identical dimensions for A it will suffice to work with dyadic cubes.

4. MASS DISTRIBUTION AND HAUSDORFF DIMENSION

The following well known (see e.g. [FAL2, p. 232]) mass distribution principle will be used in Section 5.

Mass Distribution Principle. Let μ be a mass distribution on $A \subset \mathbf{R}^n$. If there exist constants $c > 0$ and $\delta > 0$ such that, for all dyadic cubes $Q \subset \mathbf{R}^n$ with $|Q| \leq \delta$,

$$(10) \quad \mu(Q) \leq c \cdot |Q|^\alpha,$$

then

$$(11) \quad \alpha \leq \dim_H(A).$$

Proof. Let $\{Q_i\}_{i=1}^\infty$ be a covering of A with dyadic cubes of diameter not exceeding δ . Then

$$(12) \quad 0 < \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty Q_i\right) \leq \sum_1^\infty \mu(Q_i) \leq c \cdot \sum_1^\infty |Q_i|^\alpha$$

and hence the discontinuity in the $M^\alpha(A)$ -graph from $+\infty$ to 0 occurs at a value not less than α . Thus

$$(13) \quad \alpha \leq \dim_H(A).$$

5. THE MAIN RESULT

The notation used in the following theorem and in its proof can be found in Section 0.

THEOREM. *Let*

$$(14) \quad f(x) = \sum_{p=0}^\infty 2^{-p} \text{dist}(2^{2^p}x, \mathbf{Z}), \quad x \in [0, 1].$$

Then for every Borel subset B of $\text{graph}(f)$ with $m(\text{Proj}(B)) > 0$,

$$(15) \quad \dim_H(B) = 2.$$

Proof. Assume that B is a Borel set as above. From $\text{graph}(f) \subset \mathbf{R}^2$ there follows

$$(16) \quad \dim_H(B) \leq 2.$$

It will suffice to prove that

$$(17) \quad \alpha \leq \dim_H(B)$$

for an arbitrary positive $\alpha < 2$. Distribute the unit mass as in Lemma 1. Let Q be a dyadic cube with side length less than $\frac{1}{4}$. Then the side length