

## 2.7. Mesures conformes sur l'ensemble limite d'un groupe quasiconvexe

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **17.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

D'après l'exemple (a), on a :

$$\|t'(\xi)\| = e^{B_\xi(x,y)} = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)}.$$

Par ailleurs, la composée  $h = t \circ p$  vérifie  $h^{-1}x = g^{-1}x$ , d'où :

$$\|g'(\xi)\| = \|t'(\xi)\| \|p'(\xi)\| = \|t'(\xi)\| = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)}.$$

## 2.7. MESURES CONFORMES SUR L'ENSEMBLE LIMITE D'UN GROUPE QUASI-CONVEXE

Soit  $\Gamma$  un groupe quasi-convexe d'isométries de  $X$  (voir 1.8), non élémentaire. Son ensemble limite  $\Lambda$  hérite de la structure conforme de  $\partial X$ . Notons  $p(x, y, \xi)$  le facteur conforme en  $\xi \in \Lambda$ , de l'application identité de  $(\Lambda, d_x)$  sur  $(\Lambda, d_y)$ . D'après le corollaire 2.6.3 (ou plutôt sa preuve), on a :

$$(2.7.1) \quad p(x, y, \xi) = e^{B_\xi(x,y)}.$$

D'autre part, d'après le corollaire 2.6.3,  $\Gamma$  agit par transformations conformes sur  $(\Lambda, d_x)$ . Le facteur conforme de  $g \in \Gamma$  en  $\xi$ , est :

$$(2.7.2) \quad |g'(\xi)|_x = p(x, g^{-1}x, \xi).$$

Comme dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de  $\mathbf{H}_R^n$ , on définit la notion de mesure  $\alpha$ -conforme sur  $\Lambda$  (voir [Su], [N], et [C] pour une notion analogue sur les espaces hyperboliques généraux) :

La collection de mesures  $\{\mu_x, x \in X\}$  est une mesure  $\alpha$ -conforme, si pour tout  $x \in X$ ,  $\mu_x$  est finie non nulle, de support inclus dans  $\Lambda$ , et si pour tout  $x, y \in X$  et  $g \in \Gamma$  :

$$(2.7.3) \quad \begin{aligned} \mu_y &= [p(x, y, \cdot)]^\alpha \mu_x \\ g^* \mu_x &= \mu_{g^{-1}x} = |g'|_x^\alpha \mu_x. \end{aligned}$$

La théorie des mesures conformes est essentiellement la même que pour les groupes convexes cocompacts de  $\mathbf{H}_R^n$ . La seule différence est qu'une boule de  $\Lambda$  n'est pas en général une ombre. Néanmoins elle en est presque une d'après 1.6.2. Soit  $\tau$  la dimension de Hausdorff de  $(\Lambda, d_x)$ . Soit  $\nu_x$  la  $\tau$ -mesure de Hausdorff de  $(\Lambda, d_x)$ . On a :

2.7.4. THÉORÈME. *La collection  $\{\nu_x, x \in X\}$  est une  $\tau$ -mesure conforme. De plus, toute mesure conforme est une  $\tau$ -mesure conforme, égale à une constante près à  $\{\nu_x, x \in X\}$ .*

De plus :

2.7.5. THÉORÈME.

a) La dimension  $\tau$  est égale au taux de croissance de  $\Gamma$  dans  $X$ .  
C'est-à-dire:

$$\tau = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \# \{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leq n\}.$$

b) La  $v_x$ -mesure d'une boule de  $(\Lambda, d_x)$ , est proportionnelle à son rayon à la puissance  $\tau$ . Autrement dit: il existe une constante  $C_x \geq 1$ , telle que pour toute boule  $B(\xi, r)$  centrée sur  $\Lambda$ , on ait:

$$C_x^{-1} r^\tau \leq v_x(B(\xi, r)) \leq C_x r^\tau.$$

Rappelons les principales étapes de la démonstration de ces résultats:

Soit  $\alpha_0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \# \{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leq n\}$ . S. J. Patterson a exhibé

une mesure  $\alpha_0$ -conforme (voir par exemple [Su], p. 175). D'autre part d'après D. Sullivan, si  $\{\mu_x, x \in X\}$  est une  $\alpha$ -mesure conforme, alors la  $\mu_x$  mesure d'une boule de  $\Lambda$  est proportionnelle à son rayon à la puissance  $\alpha$  (c'est le lemme de l'ombre [Su], p. 180). Dès lors par un principe général,  $\alpha$  (et en particulier  $\alpha_0$ ) est égal à  $\tau$ , les mesures  $\mu_x$  et  $v_x$  sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et leurs densités sont bornées. Ainsi on obtient 2.7.5. Maintenant puisque  $v_x$  est finie,  $\{v_x, x \in X\}$  est une  $\tau$ -mesure conforme (voir 2.6.3). Deux  $\tau$ -mesures conformes absolument continues l'une par rapport à l'autre sont égales (voir [Su], p. 181). Le théorème 2.7.4 en découle.

2.8. FLOT GÉODÉSIQUE ASSOCIÉ À UNE ACTION QUASI-CONVEXE

Soit  $X$  un CAT(-1)-espace, sur lequel agit  $\Gamma$  par isométrie de manière quasi-convexe. Notons  $\Lambda$  l'ensemble limite de  $\Gamma$  dans  $\partial X$ . Définissons  $G\Lambda$  l'ensemble des géodésiques (paramétrées) de  $X$ , dont les extrémités appartiennent à  $\Lambda$ :

$$G\Lambda = \{\gamma: \mathbf{R} \rightarrow X \text{ isométries avec } \gamma(-\infty) \in \Lambda, \gamma(+\infty) \in \Lambda\}.$$

Et équipons-le de la métrique suivante:

$$|\gamma - \gamma'|_{GA} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \frac{e^{-|t|}}{2} dt.$$

La topologie associée est celle de la convergence uniforme sur les compacts.