Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

Autor: Bourdon, Marc

Kapitel: 2.7. Mesures conformes sur l'ensemble limite d'un groupe quasiconvexe

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61817

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

D'après l'exemple (a), on a:

$$\| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x,y)} = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

Par ailleurs, la composée $h = t \circ p$ vérifie $h^{-1}x = g^{-1}x$, d'où:

$$\| g'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| \, \| p'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

2.7. Mesures conformes sur l'ensemble limite d'un groupe quasi-convexe

Soit Γ un groupe quasi-convexe d'isométries de X (voir 1.8), non élémentaire. Son ensemble limite Λ hérite de la structure conforme de ∂X. Notons $p(x, y, \xi)$ le facteur conforme en $\xi \in \Lambda$, de l'application identité de (Λ, d_x) sur (Λ, d_y). D'après le corollaire 2.6.3 (ou plutôt sa preuve), on a:

$$p(x, y, \xi) = e^{B_\xi(x,y)} . \tag{2.7.1}$$

D'autre part, d'après le corollaire 2.6.3, Γ agit par transformations conformes sur (Λ, d_x). Le facteur conforme de $g \in \Gamma$ en ξ, est:

$$| g'(\xi) |_x = p(x, g^{-1}x, \xi) . \tag{2.7.2}$$

Comme dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, on définit la notion de mesure α-conforme sur Λ (voir [Su], [N], et [C] pour une notion analogue sur les espaces hyperboliques généraux):

La collection de mesures $\{\mu_x, x \in X\}$ est une mesure α-conforme, si pour tout $x \in X$, μ_x est finie non nulle, de support inclus dans Λ, et si pour tout $x, y \in X$ et $g \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \mu_y &= [p(x, y, .)]^\alpha \mu_x \\ g^* \mu_x &= \mu_{g^{-1}x} = | g' |_x^\alpha \mu_x . \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

La théorie des mesures conformes est essentiellement la même que pour les groupes convexes cocompacts de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$. La seule différence est qu'une boule de Λ n'est pas en général une ombre. Néanmoins elle en est presque une d'après 1.6.2. Soit τ la dimension de Hausdorff de (Λ, d_x). Soit ν_x la τ-mesure de Hausdorff de (Λ, d_x). On a:

2.7.4. Théorème. *La collection* $\{\nu_x, x \in X\}$ *est une* τ*-mesure conforme. De plus, toute mesure conforme est une* τ*-mesure conforme, égale à une constante près à* $\{\nu_x, x \in X\}$.

De plus:

2.7.5. THÉORÈME.

a) *La dimension* τ *est égale au taux de croissance de* Γ *dans* X. *C'est-à-dire:*

$$\tau = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \log \# \{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leqslant n\} .$$

b) *La* ν_x*-mesure d'une boule de* (Λ, d_x), *est proportionnelle à son rayon à la puissance* τ. *Autrement dit: il existe une constante* $C_x \geqslant 1$, *telle que pour toute boule* $B(\xi, r)$ *centrée sur* Λ, *on ait:*

$$C_x^{-1} r^\tau \leqslant \nu_x(B(\xi, r)) \leqslant C_x r^\tau .$$

Rappelons les principales étapes de la démonstration de ces résultats: Soit $\alpha_0 = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \log \#\{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leqslant n\}$. S.J. Patterson a exhibé une mesure α_0-conforme (voir par exemple [Su], p. 175). D'autre part d'après D. Sullivan, si $\{\mu_x, x \in X\}$ est une α-mesure conforme, alors la μ_x mesure d'une boule de Λ est proportionnelle à son rayon à la puissance α (c'est le lemme de l'ombre [Su], p. 180). Dès lors par un principe général, α (et en particulier α_0) est égal à τ, les mesures μ_x et ν_x sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et leurs densités sont bornées. Ainsi on obtient 2.7.5. Maintenant puisque ν_x est finie, $\{\nu_x, x \in X\}$ est une τ-mesure conforme (voir 2.6.3). Deux τ-mesures conformes absolument continues l'une par rapport à l'autre sont égales (voir [Su], p. 181). Le théorème 2.7.4 en découle.

2.8. FLOT GÉODÉSIQUE ASSOCIÉ À UNE ACTION QUASI-CONVEXE

Soit X un CAT(-1)-espace, sur lequel agit Γ par isométrie de manière quasi-convexe. Notons Λ l'ensemble limite de Γ dans ∂X. Définissons $G\Lambda$ l'ensemble des géodésiques (paramétrées) de X, dont les extrémités appartiennent à Λ:

$$G\Lambda = \{\gamma : \mathbf{R} \to X \text{ isométries avec } \gamma(-\infty) \in \Lambda, \gamma(+\infty) \in \Lambda\} .$$

Et équipons-le de la métrique suivante:

$$|\gamma - \gamma'|_{GA} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \frac{e^{-|t|}}{2} dt .$$

La topologie associée est celle de la convergence uniforme sur les compacts.