2.6. Structure conforme sur X

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

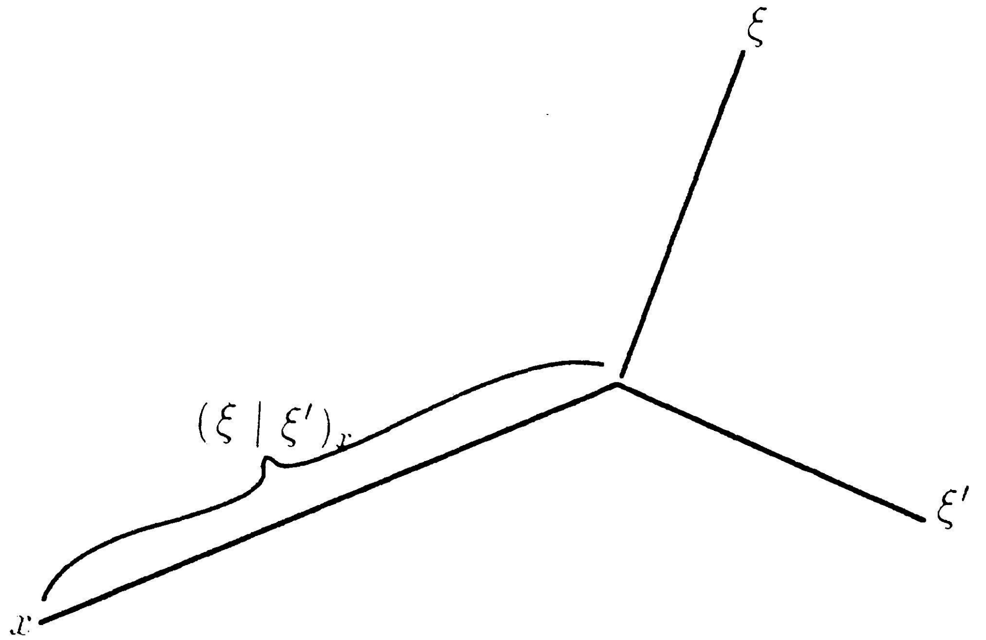

FIGURE 4

2.6. STRUCTURE CONFORME SUR ∂X

Nous montrons maintenant que la famille de métriques $\{d_x, x \in X\}$, définit une structure conforme sur ∂X. On a:

2.6.1. PROPOSITION. *Soit x une origine dans X et y, z deux éléments de X. La fonction sur $(\partial X, d_x)$, définie par:*

$$\xi \mapsto B_\xi(y, z)$$

est lipschitzienne.

2.6.2. *Preuve.* D'après les relations 2.2.1 et 2.2.2, on a:

$$B_\xi(y, z) = -B_\xi(x, y) + B_\xi(x, z) .$$

Aussi, il suffit de montrer que la fonction:

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur $(\partial X, d_x)$. D'après la définition des métriques d_x et d'après la relation 2.4.2, on a:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x, y) + B_{\xi'}(x, y))}$$

ou encore

(1) $$B_\xi(x, y) = 2 \log d_y(\xi, \xi') - 2 \log d_x(\xi, \xi') - B_{\xi'}(x, y) .$$

Supposons que ∂X ne soit pas réduit à un point. Soit alors V un petit voisinage compact de ξ, et ξ' un élément fixé en dehors de V. La fonction:

$$\xi \mapsto 2 \log d_x(\xi, \xi')$$

est lipschitzienne sur (V, d_x). Les métriques d_x et d_y étant des métriques visuelles de paramètres respectifs (x, e) et (y, e), elles sont Lipschitz-équivalentes (voir 1.5.3.b). Donc la fonction

$$\xi \mapsto 2 \log d_y(\xi, \xi')$$

est également lipschitzienne sur (V, d_x). Dès lors, par la relation (1), la fonction:

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur (V, d_x). Maintenant la compacité de $(\partial X, d_x)$ montre qu'elle est lipschitzienne sur ∂X. $\square$

2.6.3. COROLLAIRE.

a) *Quels que soient les éléments* x *et* y *de* X, *les métriques* d_x *et* d_y *sont conformes.*

b) *Soit* g *une isométrie de* X. *Alors* g *est une application conforme de* $(\partial X, d_x)$, *dont le facteur conforme en* ξ *est:*

$$| g'(\xi) |_x = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} .$$

2.6.4. *Preuve:*

a) D'après la relation 2.4.2 et la définition des métriques d_x, on a:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x,y) + B_{\xi'}(x,y))} .$$

Donc la proposition 2.6.1 donne:

$$\frac{d_y(\xi, \xi')}{d_x(\xi, \xi')} \underset{\xi' \to \xi}{\to} e^{B_\xi(x,y)}$$

ce qui montre que d_x et d_y sont conformes.

b) Puisque g est une isométrie de X, on a:

$$(g\xi \mid g\xi')_x = (\xi \mid \xi')_{g^{-1}x} .$$

Donc:

$$d_x(g\xi, g\xi') = d_{g^{-1}x}(\xi, \xi')$$

et la fin de la preuve est identique au (a). $\square$

2.6.5. Exemples.

a) Prenons $X = \mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ et x le centre du modèle en boule. Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}})$ agit par transformations conformes sur la sphère S^n munie de la métrique euclidienne. Notons $\| g'(\xi) \|$ le facteur conforme en ξ d'un élément g de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}})$. D'après l'exemple 2.5.9(a) on a:

$$\| g'(\xi) \| = | g'(\xi) |_x = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} .$$

b) Prenons $X = \mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ et normalisons la métrique afin que sa courbure soit comprise entre -4 et -1. Soit x le centre du modèle en boule.

Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ laisse invariant le champ d'hyperplans $\{P_\xi, \xi \in S^{2n-1}\}$, défini par:

$$P_\xi = \{u \in T_\xi S^{2n-1};\ h(\xi, u) = 0\}$$

où h est la forme hermitienne de $\mathbf{C}^n$:

$$h(\xi, u) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{u}_i .$$

Il agit par transformations conformes sur $\{P_\xi, \xi \in S^{2n-1}\}$ muni de la métrique euclidienne. Notons $\| g'(\xi) \|$ le facteur conforme sur P_ξ d'un élément g de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$. Nous allons voir qu'à nouveau:

$$\| g'(\xi) \| = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} = | g'(\xi) |_x .$$

Pour ce faire, ramenons-nous à l'exemple a) par un argument de D. Sullivan ([Su], p. 176). Observons tout d'abord que $\| g'(\xi) \|$ ne dépend que de $g^{-1}x$. En effet, si $h \in \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ vérifie $h^{-1}x = g^{-1}x$, alors la composée $g \circ h^{-1}$ fixe x le centre du modèle en boule, donc $g \circ h^{-1}$ appartient à $U(n)$ et:

$$\| g'(\xi) \| = \| h'(\xi) \| .$$

Choisissons donc judicieusement h. Notons y l'intersection de l'horosphère H_ξ, basée en ξ, contenant $g^{-1}x$, avec la géodésique $(x\xi)$. Le stabilisateur de H_ξ dans $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ agit transitivement sur H_ξ, de plus le facteur conforme de ses éléments en P_ξ est 1. Soit p un élément de $\mathrm{Stab}(H_\xi)$, vérifiant

$$p(g^{-1}x) = y .$$

Soit aussi une copie de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ contenant la géodésique $(x\xi)$. L'espace tangent à son bord en ξ est contenu dans P_ξ. Soit t un élément de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ qui fixe cette copie et envoie y sur x.

D'après l'exemple (a), on a:

$$\| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x,y)} = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} .$$

Par ailleurs, la composée $h = t \circ p$ vérifie $h^{-1}x = g^{-1}x$, d'où:

$$\| g'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| \, \| p'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} .$$

2.7. Mesures conformes sur l'ensemble limite d'un groupe quasi-convexe

Soit Γ un groupe quasi-convexe d'isométries de X (voir 1.8), non élémentaire. Son ensemble limite Λ hérite de la structure conforme de ∂X. Notons $p(x, y, \xi)$ le facteur conforme en $\xi \in \Lambda$, de l'application identité de (Λ, d_x) sur (Λ, d_y). D'après le corollaire 2.6.3 (ou plutôt sa preuve), on a:

$$p(x, y, \xi) = e^{B_\xi(x,y)} . \tag{2.7.1}$$

D'autre part, d'après le corollaire 2.6.3, Γ agit par transformations conformes sur (Λ, d_x). Le facteur conforme de $g \in \Gamma$ en ξ, est:

$$| g'(\xi) |_x = p(x, g^{-1}x, \xi) . \tag{2.7.2}$$

Comme dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, on définit la notion de mesure α-conforme sur Λ (voir [Su], [N], et [C] pour une notion analogue sur les espaces hyperboliques généraux):

La collection de mesures $\{\mu_x, x \in X\}$ est une mesure α-conforme, si pour tout $x \in X$, μ_x est finie non nulle, de support inclus dans Λ, et si pour tout $x, y \in X$ et $g \in \Gamma$:

$$\begin{gathered} \mu_y = [p(x, y, .)]^\alpha \mu_x \\ g^* \mu_x = \mu_{g^{-1}x} = | g' |_x^\alpha \mu_x . \end{gathered} \tag{2.7.3}$$

La théorie des mesures conformes est essentiellement la même que pour les groupes convexes cocompacts de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$. La seule différence est qu'une boule de Λ n'est pas en général une ombre. Néanmoins elle en est presque une d'après 1.6.2. Soit τ la dimension de Hausdorff de (Λ, d_x). Soit ν_x la τ-mesure de Hausdorff de (Λ, d_x). On a:

2.7.4. Théorème. *La collection* $\{\nu_x, x \in X\}$ *est une τ-mesure conforme. De plus, toute mesure conforme est une τ-mesure conforme, égale à une constante près à* $\{\nu_x, x \in X\}$.

De plus: