1.6. Action au bord des quasi-isométries

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

1.6. Action au bord des quasi-isométries

Commençons par rappeler la définition d'application quasi-conforme.

Un k-anneau, $k \geqslant 1$, d'un espace métrique (E, d), est un couple (B_1, B_2) de deux boules concentriques, dont les rayons r_1 et r_2 vérifient la relation:

$$r_2 = kr_1 .$$

Une application:

$$f : (E, d) \to (E', d')$$

est quasi-conforme (au sens des anneaux), s'il existe une fonction ψ de $[1, +\infty[$ dans lui-même, telle que l'image par f de tout k-anneau est contenue dans un $\psi(k)$-anneau de (E', d'). Autrement dit, si (B_1, B_2) est un k-anneau de (E, d), alors il existe un $\psi(k)$-anneau (B_1', B_2') de (E', d'), tel que:

$$B_1' \subset f(B_1) \subset f(B_2) \subset B_2' .$$

Notons en particulier que l'image d'une boule de (E, d) est contenue dans un $\psi(1)$-anneau de (E', d').

Un homéomorphisme f est quasi-conforme si f et f^{-1} sont quasi-conformes. De même, un plongement est quasi-conforme, s'il est un homéomorphisme quasi-conforme sur son image.

Afin de décrire les boules, et par suite les anneaux d'une métrique visuelle sur le bord d'un espace δ-hyperbolique, rappelons la notion classique d'ombre:

1.6.1. Définition (Margulis). Soit x une origine dans X. L'ombre portée à partir de x, de la boule $B(y, R)$ de X, est le sous-ensemble de ∂X

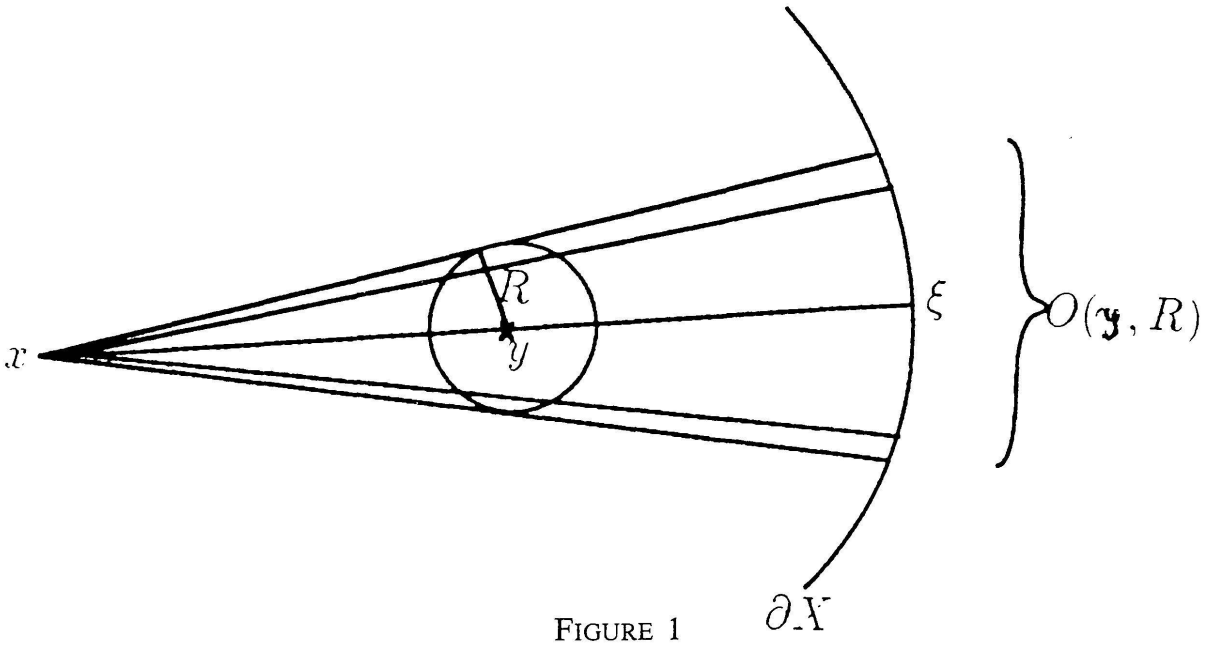

Figure 1

noté $O(y, R)$, des extrémités des rayons géodésiques issus de x passant par $B(y, R)$. On dit que $O(y, R)$ est centrée en ξ, si y appartient à un rayon géodésique $[x\xi)$. (Voir figure 1).

Etant donnée une métrique visuelle d de paramètres (x, t) sur ∂X, à l'ombre $O(y, R)$ attachons le rayon:

$$r(y) = t^{-|x-y|}.$$

La propriété de visibilité donne alors:

1.6.2. LEMME. *Pour R suffisamment grand, ($R \geqslant 5\delta$ convient), il existe une constante $D = D(R) \geqslant 1$, telle que pour toute boule $B(\xi, r)$ de $(\partial X, d)$, on puisse trouver des ombres $O(y_1, R)$ et $O(y_2, R)$ centrées en ξ, vérifiant:*

$$O(y_1, R) \subset B(\xi, r) \subset O(y_2, R)$$

et

$$D^{-1} r(y_2) \leqslant r \leqslant D r(y_1).$$

Ainsi, les boules de $(\partial X, d)$ ressemblent aux ombres.

Preuve de 1.6.2. Rappelons qu'il existe une constante $C \geqslant 1$ telle que pour tout point ξ, ξ' de ∂X on ait:

(1) $$C^{-1} t^{-d} \leqslant d(\xi, \xi') \leqslant C t^{-d} \quad \text{avec} \quad d = d_X(x, (\xi\xi')).$$

D'autre part observons que tout triangle de $X \cup \partial X$ est 5δ-fin (voir 1.4.1.b)).

Soit $R \geqslant 5\delta$, ξ un point de ∂X, $B(\xi, r)$ une boule de ∂X centrée en ξ, et γ un rayon géodésique joignant x à ξ. Prenons y_2 le point de γ vérifiant:

$$|x - y_2| = \max\{0, -\log_t Cr - 5\delta - 1\}$$

et montrons que $B(\xi, r)$ est contenue dans $O(y_2, R)$. Soit ξ' un point de $B(\xi, r)$, le triangle $(x\xi\xi')$ étant 5δ-fin, on a:

$$d(y_2, [x\xi') \cup (\xi\xi')) \leqslant 5\delta.$$

Or par l'inégalité triangulaire et (1):

$$\begin{aligned} d(y_2, (\xi\xi')) &\geqslant d(x, (\xi\xi')) - |x - y_2| \\ &\geqslant -\log_t Cr - |x - y_2| \\ &\geqslant 5\delta + 1 \end{aligned}$$

donc: $d(y_2, [x\xi')) \leqslant 5\delta \leqslant R$ et ξ appartient à $O(y_2, R)$.

Prenons y_1 le point de γ vérifiant:

$$|x - y_1| = -\log_t \frac{r}{C} + R + 10\delta$$

(d'après (1), $r \leqslant C$, donc $-\log_t(r/C) + R + 10\delta \geqslant 0$) et montrons que $B(\xi, r)$ contient $O(y_1, R)$. Soit ξ' un point de $O(y_1, R)$, γ' un rayon géodésique joignant x à ξ passant par $B(y_1, R)$, P un point appartenant à $\gamma \cap B(y_1, R)$ et Q un point de $(\xi\xi')$ vérifiant:

$$|x - Q| = d(x, (\xi\xi')) .$$

Considérons le quadrilatère $(y_1 P \xi \xi')$, en le subdivisant en deux triangles, on voit qu'il est 10δ-fin, aussi:

$$d(Q, [Py_1] \cup [P\xi') \cup [y_1\xi)) \leqslant 10\delta .$$

D'autre part:

$$d(x, [Py_1] \cup [P\xi') \cup [y_1\xi)) \geqslant |x - y_1| - R .$$

Donc:

$$\begin{aligned} d(x, (\xi\xi')) &= |x - Q| \\ &\geqslant d(x, [Py_1] \cup [P\xi') \cup [y\xi)) - d(Q, [Py_1] \cup [P\xi') \cup [y\xi)) \\ &\geqslant |x - y_1| - R - 10\delta = -\log_t \frac{r}{C} \end{aligned}$$

alors d'après (1), $d(\xi, \xi') \leqslant r$ et ξ' appartient à $B(\xi, r)$.

On a donc trouvé deux ombres centrées en ξ qui vérifient:

$$O(y_1, R) \subset B(\xi, r) \subset O(y_2, R) .$$

Leurs rayons satisfont:

$$r(y_1) = t^{-R-10\delta} C^{-1} r \quad \text{et} \quad r(y_2) \leqslant t^{5\delta+1} C r .$$

Posons $D = \max\{t^{R+10\delta} C, t^{5\delta+1} C\}$. On obtient:

$$D^{-1} r(y_2) \leqslant r \leqslant D r(y_1) . \quad \square$$

De manière symétrique, on a aussi:

1.6.3. LEMME. *Pour R suffisamment grand ($R \geqslant 5\delta$ convient), il existe une constante $E = E(R) \geqslant 1$, telle que pour tout $\xi \in \partial X$ et toute ombre $O(y, R)$ centrée en ξ, on puisse trouver des boules $B(\xi, r_1)$ et $B(\xi, r_2)$ de $(\partial X, d)$ vérifiant:*

$$B(\xi, r_1) \subset O(y, R) \subset B(\xi, r_2)$$

avec

$$E^{-1} r_2 \leqslant r(y) \leqslant E r_1 .$$

Preuve de 1.6.3. Elle est semblable à la précédente, donnons-la néanmoins. On reprend les notations de la preuve de 1.6.2.

Soit $r_1 = C^{-1} t^{-5\delta - 1} r(y)$, montrons que $B(\xi, r_1)$ est contenue dans $O(y, R)$. Soit ξ' un point de $B(\xi, r_1)$. Le triangle $(x\xi\xi')$ étant 5δ-fin, on a:

$$d(y, [x\xi') \cup (\xi\xi')) \leqslant 5\delta .$$

D'autre part, d'après l'inégalité triangulaire, les inégalités (1) et le choix de r_1:

$$\begin{aligned} d(y, (\xi\xi')) &\geqslant d(x, (\xi\xi')) - |x - y| \\ &\geqslant -\log_t d(\xi, \xi') - \log_t C + \log_t r(y) \\ &\geqslant 5\delta + 1 \end{aligned}$$

donc $d(y, [x\xi')) \leqslant 5\delta \leqslant R$ et ξ' appartient à $O(y, R)$.

Soit $r_2 = C t^{R + 10\delta} r(y)$. Montrons que $B(\xi, r_2)$ contient $O(y, R)$. Soit ξ' un point de $O(y, R)$; comme dans la preuve de 1.6.2, on a:

$$d(x, (\xi\xi')) \geqslant |x - y| - R - 10\delta .$$

Donc d'après (1) et le choix de r_2:

$$d(\xi, \xi') \leqslant C t^{R + 10\delta} r(y) = r_2$$

et ξ' appartient à $B(\xi, r_2)$.

Posons $E = \max\{C t^{5\delta + 1}, C t^{R + 10\delta}\}$, on obtient

$$E^{-1} r_2 \leqslant r(y) \leqslant E r_1 . \quad \square$$

D'après la propriété des quasi-rayons géodésiques dans un espace hyperbolique, l'image d'une ombre se compare aisément à une ombre. Ainsi, et en utilisant les lemmes 1.6.2 et 1.6.3, on obtient la généralisation suivante d'un théorème de Margulis.

1.6.4. THÉORÈME. *Soit X et X' deux espaces hyperboliques. Supposons leurs bords équipés de métriques visuelles.*

a) *Toute quasi-isométrie f de X dans X' s'étend en un plongement quasi-conforme, bi-Hölder, de ∂X dans $\partial X'$.*

b) *Si X et X' sont quasi-isométriques, leurs bords se correspondent par un homéomorphisme quasi-conforme bi-Hölder.*

Preuve de 1.6.4. Il suffit de montrer a). Soit x une origine dans X, prenons pour origine de X' le point $f(x)$. Soit respectivement d et d' des métriques visuelles de paramètre (x, t) et $(f(x), t')$ sur ∂X et $\partial X'$.

Par la propriété des quasi-rayons géodésiques (1.4.1.c)), f s'étend en une application de ∂X dans $\partial X'$, notée ∂f. C'est un plongement bi-Hölder à cause des définitions des métriques visuelles et de la propriété des quasi-géodésiques.

Pour montrer que ∂f est un plongement quasi-conforme, on utilise les ombres:

Soit ξ un point de ∂X, y_2 et y_1 deux points dans cet ordre sur $[x\xi)$, $O(y_1, R)$ et $O(y_2, R)$ les ombres portées depuis x des boules $B(y_1, R)$ et $B(y_2, R)$ de X. Par la propriété des quasi-rayons géodésiques, il existe des constantes $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ qui ne dépendent que de R, des constantes de quasi-isométrie de f et de l'hyperbolicité de X et de X'; avec les propriétés suivantes: Notons y_1' et y_2' les projections de $f(y_1)$ et de $f(y_2)$ sur $[f(x)\partial f(\xi))$. Soit $O(y_1', R_1)$ et $O(y_2', R_2)$ les ombres portées depuis $f(x)$ des boules $B(y_1', R_1)$ et $B(y_2', R_2)$ de X'; elles sont centrées en $\partial f(\xi)$. Alors si R a été choisi suffisamment grand:

$$O(y_1', R_1) \cap \partial f(\partial X) \subset \partial f(O(y_1, R))$$
$$\subset \partial f(O(y_2, R)) \subset O(y_2', R_2) \cap \partial f(\partial X) .$$

De plus le rapport des rayons des ombres $O(y_1', R_1)$ et $O(y_2', R_2)$ est borné par une fonction du rapport des rayons de $O(y_1, R)$ et de $O(y_2, R)$ qui ne dépend que des constantes de quasi-isométrie de f, de l'hyperbolicité de X et de X', et des paramètres t et t'.

Alors les lemmes 1.6.2 et 1.6.3 montrent que ∂f est quasi-conforme sur son image. De façon analogue, ∂f^{-1} est quasi-conforme de $\partial f(\partial X)$ sur ∂X. Ainsi ∂f est un plongement quasi-conforme. □

1.6.4. *Remarque.* Deux métriques d_1 et d_2 sur un même espace E sont dites quasi-conformes si l'identité de (E, d_1) sur (E, d_2) est un homéomorphisme quasi-conforme. Clairement la composée de deux applications quasi-conformes est quasi-conforme. Aussi, la relation: «d_1 et d_2 sont quasi-conformes», est une relation d'équivalence sur l'ensemble des métriques de E. La classe d'équivalence d'une métrique d de E est appelée structure quasi-conforme de (E, d). (Voir [Pan] pour une définition plus générale). Le théorème 1.6.4.(b) indique que la structure quasi-conforme d'une métrique visuelle sur ∂X, est un invariant de quasi-isométrie de X.