Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

Autor: Bourdon, Marc

Kapitel: 1.6. Action au bord des quasi-isométries

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61817

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1.6. Action au bord des quasi-isométries

Commençons par rappeler la définition d'application quasi-conforme.

Un k-anneau, $k \geqslant 1$, d'un espace métrique (E, d), est un couple (B_1, B_2) de deux boules concentriques, dont les rayons r_1 et r_2 vérifient la relation:

$$r_2 = kr_1 .$$

Une application:

$$f : (E, d) \to (E', d')$$

est quasi-conforme (au sens des anneaux), s'il existe une fonction ψ de $[1, +\infty[$ dans lui-même, telle que l'image par f de tout k-anneau est contenue dans un $\psi(k)$-anneau de (E', d'). Autrement dit, si (B_1, B_2) est un k-anneau de (E, d), alors il existe un $\psi(k)$-anneau (B'_1, B'_2) de (E', d'), tel que:

$$B'_1 \subset f(B_1) \subset f(B_2) \subset B'_2 .$$

Notons en particulier que l'image d'une boule de (E, d) est contenue dans un $\psi(1)$-anneau de (E', d').

Un homéomorphisme f est quasi-conforme si f et f^{-1} sont quasi-conformes. De même, un plongement est quasi-conforme, s'il est un homéomorphisme quasi-conforme sur son image.

Afin de décrire les boules, et par suite les anneaux d'une métrique visuelle sur le bord d'un espace δ-hyperbolique, rappelons la notion classique d'ombre:

1.6.1. Définition (Margulis). Soit x une origine dans X. L'ombre portée à partir de x, de la boule $B(y, R)$ de X, est le sous-ensemble de ∂X

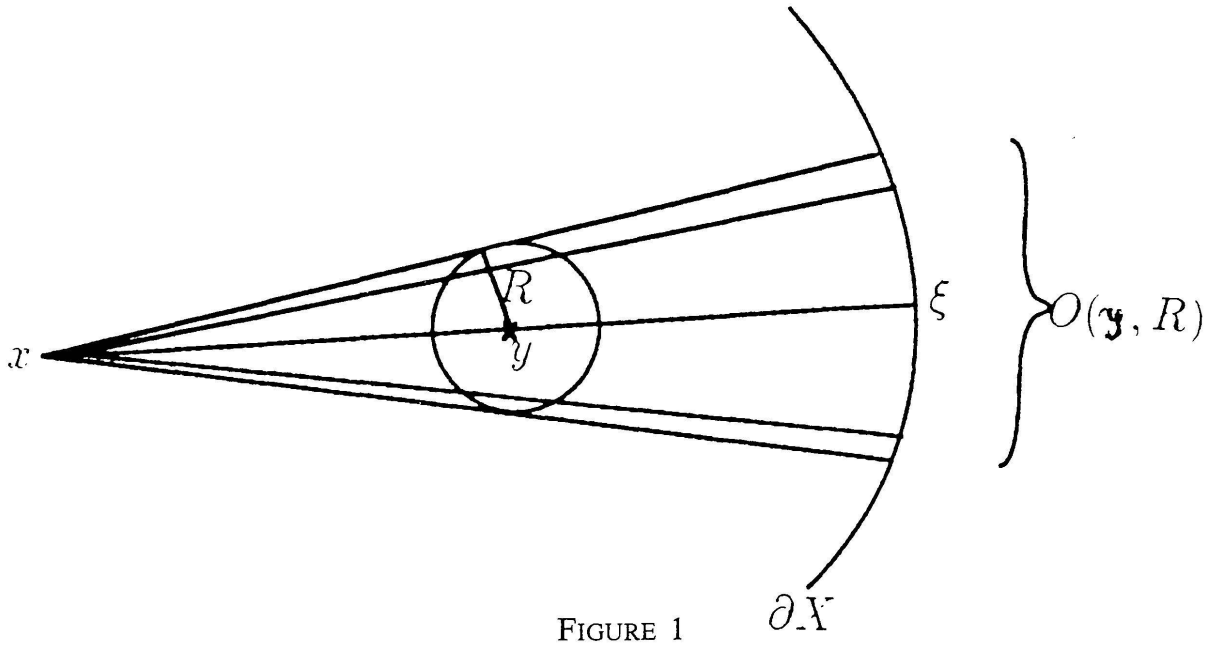

Figure 1

noté $O(y, R)$, des extrémités des rayons géodésiques issus de x passant par $B(y, R)$. On dit que $O(y, R)$ est centrée en ξ, si y appartient à un rayon géodésique $[x\xi)$. (Voir figure 1).

Etant donnée une métrique visuelle d de paramètres (x, t) sur ∂X, à l'ombre $O(y, R)$ attachons le rayon:

$$r(y) = t^{-|x-y|}.$$

La propriété de visibilité donne alors:

1.6.2. LEMME. *Pour R suffisamment grand, ($R \geqslant 5\delta$ convient), il existe une constante $D = D(R) \geqslant 1$, telle que pour toute boule $B(\xi, r)$ de $(\partial X, d)$, on puisse trouver des ombres $O(y_1, R)$ et $O(y_2, R)$ centrées en ξ, vérifiant:*

$$O(y_1, R) \subset B(\xi, r) \subset O(y_2, R)$$

et

$$D^{-1} r(y_2) \leqslant r \leqslant D r(y_1).$$

Ainsi, les boules de $(\partial X, d)$ ressemblent aux ombres.

Preuve de 1.6.2. Rappelons qu'il existe une constante $C \geqslant 1$ telle que pour tout point ξ, ξ' de ∂X on ait:

(1) $$C^{-1} t^{-d} \leqslant d(\xi, \xi') \leqslant C t^{-d} \quad \text{avec} \quad d = d_X(x, (\xi\xi')).$$

D'autre part observons que tout triangle de $X \cup \partial X$ est 5δ-fin (voir 1.4.1.b)).

Soit $R \geqslant 5\delta$, ξ un point de ∂X, $B(\xi, r)$ une boule de ∂X centrée en ξ, et γ un rayon géodésique joignant x à ξ. Prenons y_2 le point de γ vérifiant:

$$|x - y_2| = \max\{0, -\log_t Cr - 5\delta - 1\}$$

et montrons que $B(\xi, r)$ est contenue dans $O(y_2, R)$. Soit ξ' un point de $B(\xi, r)$, le triangle $(x\xi\xi')$ étant 5δ-fin, on a:

$$d(y_2, [x\xi') \cup (\xi\xi')) \leqslant 5\delta.$$

Or par l'inégalité triangulaire et (1):

$$\begin{aligned} d(y_2, (\xi\xi')) &\geqslant d(x, (\xi\xi')) - |x - y_2| \\ &\geqslant -\log_t Cr - |x - y_2| \\ &\geqslant 5\delta + 1 \end{aligned}$$

donc: $d(y_2, [x\xi')) \leqslant 5\delta \leqslant R$ et ξ appartient à $O(y_2, R)$.

Prenons y_1 le point de γ vérifiant:

$$|x - y_1| = -\log_t \frac{r}{C} + R + 10\delta$$

(d'après (1), $r \leqslant C$, donc $-\log_t(r/C) + R + 10\delta \geqslant 0$) et montrons que $B(\xi, r)$ contient $O(y_1, R)$. Soit ξ' un point de $O(y_1, R)$, γ' un rayon géodésique joignant x à ξ passant par $B(y_1, R)$, P un point appartenant à $\gamma \cap B(y_1, R)$ et Q un point de $(\xi\xi')$ vérifiant:

$$|x - Q| = d(x, (\xi\xi')) .$$

Considérons le quadrilatère $(y_1 P \xi\xi')$, en le subdivisant en deux triangles, on voit qu'il est 10δ-fin, aussi:

$$d(Q, [Py_1] \cup [P\xi') \cup [y_1\xi)) \leqslant 10\delta .$$

D'autre part:

$$d(x, [Py_1] \cup [P\xi') \cup [y_1\xi)) \geqslant |x - y_1| - R .$$

Donc:

$$\begin{aligned} d(x, (\xi\xi')) &= |x - Q| \\ &\geqslant d(x, [Py_1] \cup [P\xi') \cup [y\xi)) - d(Q, [Py_1] \cup [P\xi') \cup [y\xi)) \\ &\geqslant |x - y_1| - R - 10\delta = -\log_t \frac{r}{C} \end{aligned}$$

alors d'après (1), $d(\xi, \xi') \leqslant r$ et ξ' appartient à $B(\xi, r)$.

On a donc trouvé deux ombres centrées en ξ qui vérifient:

$$O(y_1, R) \subset B(\xi, r) \subset O(y_2, R) .$$

Leurs rayons satisfont:

$$r(y_1) = t^{-R-10\delta} C^{-1} r \quad \text{et} \quad r(y_2) \leqslant t^{5\delta+1} C r .$$

Posons $D = \max\{t^{R+10\delta} C, t^{5\delta+1} C\}$. On obtient:

$$D^{-1} r(y_2) \leqslant r \leqslant D r(y_1) . \qquad \square$$

De manière symétrique, on a aussi:

1.6.3. LEMME. *Pour R suffisamment grand ($R \geqslant 5\delta$ convient), il existe une constante $E = E(R) \geqslant 1$, telle que pour tout $\xi \in \partial X$ et toute ombre $O(y, R)$ centrée en ξ, on puisse trouver des boules $B(\xi, r_1)$ et $B(\xi, r_2)$ de $(\partial X, d)$ vérifiant:*

$$B(\xi, r_1) \subset O(y, R) \subset B(\xi, r_2)$$

avec

$$E^{-1} r_2 \leqslant r(y) \leqslant E r_1 .$$

Preuve de 1.6.3. Elle est semblable à la précédente, donnons-la néanmoins. On reprend les notations de la preuve de 1.6.2.

Soit $r_1 = C^{-1} t^{-5\delta-1} r(y)$, montrons que $B(\xi, r_1)$ est contenue dans $O(y, R)$. Soit ξ' un point de $B(\xi, r_1)$. Le triangle $(x\xi\xi')$ étant 5δ-fin, on a:

$$d(y, [x\xi') \cup (\xi\xi')) \leqslant 5\delta .$$

D'autre part, d'après l'inégalité triangulaire, les inégalités (1) et le choix de r_1:

$$\begin{aligned} d(y, (\xi\xi')) &\geqslant d(x, (\xi\xi')) - |x - y| \\ &\geqslant -\log_t d(\xi, \xi') - \log_t C + \log_t r(y) \\ &\geqslant 5\delta + 1 \end{aligned}$$

donc $d(y, [x\xi')) \leqslant 5\delta \leqslant R$ et ξ' appartient à $O(y, R)$.

Soit $r_2 = C t^{R+10\delta} r(y)$. Montrons que $B(\xi, r_2)$ contient $O(y, R)$. Soit ξ' un point de $O(y, R)$; comme dans la preuve de 1.6.2, on a:

$$d(x, (\xi\xi')) \geqslant |x - y| - R - 10\delta .$$

Donc d'après (1) et le choix de r_2:

$$d(\xi, \xi') \leqslant C t^{R+10\delta} r(y) = r_2$$

et ξ' appartient à $B(\xi, r_2)$.

Posons $E = \max\{C t^{5\delta+1}, C t^{R+10\delta}\}$, on obtient

$$E^{-1} r_2 \leqslant r(y) \leqslant E r_1 . \qquad \square$$

D'après la propriété des quasi-rayons géodésiques dans un espace hyperbolique, l'image d'une ombre se compare aisément à une ombre. Ainsi, et en utilisant les lemmes 1.6.2 et 1.6.3, on obtient la généralisation suivante d'un théorème de Margulis.

1.6.4. THÉORÈME. *Soit X et X' deux espaces hyperboliques. Supposons leurs bords équipés de métriques visuelles.*

a) *Toute quasi-isométrie f de X dans X' s'étend en un plongement quasi-conforme, bi-Hölder, de ∂X dans $\partial X'$.*

b) *Si X et X' sont quasi-isométriques, leurs bords se correspondent par un homéomorphisme quasi-conforme bi-Hölder.*

Preuve de 1.6.4. Il suffit de montrer a). Soit x une origine dans X, prenons pour origine de X' le point $f(x)$. Soit respectivement d et d' des métriques visuelles de paramètre (x, t) et $(f(x), t')$ sur ∂X et $\partial X'$.

Par la propriété des quasi-rayons géodésiques (1.4.1.c)), f s'étend en une application de ∂X dans $\partial X'$, notée ∂f. C'est un plongement bi-Hölder à cause des définitions des métriques visuelles et de la propriété des quasi-géodésiques.

Pour montrer que ∂f est un plongement quasi-conforme, on utilise les ombres:

Soit ξ un point de ∂X, y_2 et y_1 deux points dans cet ordre sur $[x\xi)$, $O(y_1, R)$ et $O(y_2, R)$ les ombres portées depuis x des boules $B(y_1, R)$ et $B(y_2, R)$ de X. Par la propriété des quasi-rayons géodésiques, il existe des constantes $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ qui ne dépendent que de R, des constantes de quasi-isométrie de f et de l'hyperbolicité de X et de X'; avec les propriétés suivantes: Notons y_1' et y_2' les projections de $f(y_1)$ et de $f(y_2)$ sur $[f(x)\partial f(\xi))$. Soit $O(y_1', R_1)$ et $O(y_2', R_2)$ les ombres portées depuis $f(x)$ des boules $B(y_1', R_1)$ et $B(y_2', R_2)$ de X'; elles sont centrées en $\partial f(\xi)$. Alors si R a été choisi suffisamment grand:

$$\begin{aligned} O(y_1', R_1) \cap \partial f(\partial X) &\subset \partial f(O(y_1, R)) \\ \subset \partial f(O(y_2, R)) &\subset O(y_2', R_2) \cap \partial f(\partial X) . \end{aligned}$$

De plus le rapport des rayons des ombres $O(y_1', R_1)$ et $O(y_2', R_2)$ est borné par une fonction du rapport des rayons de $O(y_1, R)$ et de $O(y_2, R)$ qui ne dépend que des constantes de quasi-isométrie de f, de l'hyperbolicité de X et de X', et des paramètres t et t'.

Alors les lemmes 1.6.2 et 1.6.3 montrent que ∂f est quasi-conforme sur son image. De façon analogue, ∂f^{-1} est quasi-conforme de $\partial f(\partial X)$ sur ∂X. Ainsi ∂f est un plongement quasi-conforme. $\square$

1.6.4. *Remarque.* Deux métriques d_1 et d_2 sur un même espace E sont dites quasi-conformes si l'identité de (E, d_1) sur (E, d_2) est un homéomorphisme quasi-conforme. Clairement la composée de deux applications quasi-conformes est quasi-conforme. Aussi, la relation: «d_1 et d_2 sont quasi-conformes», est une relation d'équivalence sur l'ensemble des métriques de E. La classe d'équivalence d'une métrique d de E est appelée structure quasi-conforme de (E, d). (Voir [Pan] pour une définition plus générale). Le théorème 1.6.4.(b) indique que la structure quasi-conforme d'une métrique visuelle sur ∂X, est un invariant de quasi-isométrie de X.