

# 1.5. MÉTRIQUES VISUELLES SUR X

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 1.4.1. PROPOSITION

a) Soit  $x \in X$ , et  $\xi \in \partial X$ . Il existe un rayon géodésique d'extrémités  $x$  et  $\xi$ . On le notera  $[x\xi]$ . Deux rayons géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à  $2\delta$ .

b) Soient  $\xi$  et  $\xi'$  deux points distincts de  $\partial X$ . Il existe une géodésique d'extrémités  $\xi$  et  $\xi'$ . On la notera  $(\xi\xi')$ . Deux géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à  $4\delta$ .

c) (Propriétés des quasi-rayons géodésiques et des quasi-géodésiques). Il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\delta, \lambda, k$ , avec la propriété suivante: tout  $(\lambda, k)$ -quasi-rayon géodésique (resp. quasi-géodésique) de  $X$ , est à distance de Hausdorff inférieure à  $C$  d'un rayon géodésique (resp. géodésique) de  $X$ .

1.4.2. Remarque. Lorsque  $X$  est un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace, deux points de  $X \cup \partial X$  déterminent un unique arc géodésique. C'est immédiat par comparaison avec  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2(-b^2)$ .

## 1.4.3. EXEMPLES

a) Le bord d'un arbre réel propre est totalement discontinu.

b) Soit  $X$  une variété riemannienne simplement connexe, de dimension finie, à courbure inférieure à  $-b^2$ . Étant donnée une origine  $x$  dans  $X$ , l'application exponentielle de l'espace tangent en  $x$ , induit un homéomorphisme de la sphère unité sur  $\partial X$ .

c) Soit  $X$  un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace, et  $x$  une origine dans  $X$ . Notons  $S(x, R)$  la sphère de centre  $x$  et de rayon  $R$ . Deux points de  $X$  déterminent un unique segment géodésique, donc pour  $R \geq R'$ , il existe une application naturelle de  $S(x, R)$  dans  $S(x, R')$ . On montre que  $\partial X$  est homéomorphe à la limite projective des  $S(x, R)$ , lorsque  $R$  tend vers l'infini. Notons que le bord d'un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace est généralement compliqué. N. Benakli [Be] a construit des exemples (polyèdres de Gromov), dont le bord est une courbe de Menger ou de Sierpiński.

1.5. MÉTRIQUES VISUELLES SUR  $\partial X$ 

De même qu'un changement conforme de métrique sur  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ , permet d'identifier son bord à celui de la boule euclidienne de rayon un, on peut modifier de manière «conforme» la métrique d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $X$ ,

afin que  $X \cup \partial X$  soit le complété de  $X$  pour cette nouvelle métrique. (Voir [G], [C-D-P], [C], pour plus de détails). Ainsi  $\partial X$  hérite d'une métrique compatible avec sa topologie. Les métriques obtenues de cette manière ont la propriété de visibilité, c'est-à-dire:

1.5.1. DÉFINITION. Soit  $x$  une origine dans  $X$ . Une métrique  $d_{\partial X}$  sur  $\partial X$  a la propriété de visibilité, si elle est reliée à celle de  $X$  de la façon suivante: Il existe une constante  $C \geq 1$  et un réel  $t > 1$ , tels que pour tous éléments  $\xi, \xi'$  de  $\partial X$ :

$$C^{-1}t^{-d} \leq d_{\partial X}(\xi, \xi') \leq Ct^{-d} .$$

avec

$$d = d_X(x, (\xi\xi')) .$$

Une telle métrique est appelée métrique visuelle de paramètres  $(x, t)$ .

L'énoncé précis est le suivant: ([G], §7.2, [C-D-P], chapitre 11):

1.5.2. THÉORÈME (Gromov). *Il existe un réel  $t_0 > 1$ , ne dépendant que de  $\delta$ , tel que pour tout  $t$  appartenant à  $]1, t_0[$ , le bord de  $X$  admette une métrique visuelle de paramètres  $(x, t)$ .*

### 1.5.3. Remarques

a) Pour les CAT( $-b^2$ )-espaces, le résultat est plus fin: leur bord admet une métrique visuelle de paramètre  $t$ , quel que soit  $t$  appartenant à  $]1, e^b]$ . Une manière de le montrer est d'utiliser les idées de W. J. Floyd [F]. Nous en proposerons une autre au paragraphe 2.5. Notons que  $e^b$  est optimal car il l'est sur  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n(-b^2)$ .

b) Deux métriques visuelles  $d$  et  $d'$  de paramètres respectifs  $(x, t)$  et  $(x', t')$  sont facilement comparables: Si  $t = t'$ , alors elles sont Lipschitz-équivalentes: il existe une constante  $D \geq 1$ , telle que:

$$D^{-1}d \leq d' \leq Dd .$$

Sinon, elles sont Hölder-équivalentes: il existe une constante  $D \geq 1$  et un réel  $\alpha > 0$ , tels que:

$$D^{-1}d^\alpha \leq d' \leq Dd^\alpha .$$

Ici  $\alpha$  est égal à  $\log t' / \log t$ .

c) D'après b), toute isométrie de  $X$  est un homéomorphisme bi-Lipschitz du bord de  $X$  muni d'une métrique visuelle.