# 1.5. MÉTRIQUES VISUELLES SUR X

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

1.4.1. PROPOSITION

a) *Soit* $x \in X$, *et* $\xi \in \partial X$. *Il existe un rayon géodésique d'extrémités* $x$ *et* $\xi$. *On le notera* $[x\xi)$. *Deux rayons géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à* $2\delta$.

b) *Soient* $\xi$ *et* $\xi'$ *deux points distincts de* $\partial X$. *Il existe une géodésique d'extrémités* $\xi$ *et* $\xi'$. *On la notera* $(\xi\xi')$. *Deux géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à* $4\delta$.

c) *(Propriétés des quasi-rayons géodésiques et des quasi-géodésiques). Il existe une constante* $C$ *ne dépendant que de* $\delta, \lambda, k$, *avec la propriété suivante: tout* $(\lambda, k)$*-quasi-rayon géodésique (resp. quasi-géodésique) de* $X$, *est à distance de Hausdorff inférieure à* $C$ *d'un rayon géodésique (resp. géodésique) de* $X$.

1.4.2. *Remarque.* Lorsque $X$ est un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace, deux points de $X \cup \partial X$ détermine un unique arc géodésique. C'est immédiat par comparaison avec $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$.

1.4.3. EXEMPLES

a) Le bord d'un arbre réel propre est totalement discontinu.

b) Soit $X$ une variété riemannienne simplement connexe, de dimension finie, à courbure inférieure à $-b^2$. Etant donnée une origine $x$ dans $X$, l'application exponentielle de l'espace tangent en $x$, induit un homéomorphisme de la sphère unité sur $\partial X$.

c) Soit $X$ un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace, et $x$ une origine dans $X$. Notons $S(x, R)$ la sphère de centre $x$ et de rayon $R$. Deux points de $X$ déterminent un unique segment géodésique, donc pour $R \geqslant R'$, il existe une application naturelle de $S(x, R)$ dans $S(x, R')$. On montre que $\partial X$ est homéomorphe à la limite projective des $S(x, R)$, lorsque $R$ tend vers l'infini. Notons que le bord d'un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace est généralement compliqué. N. Benakli [Be] a construit des exemples (polyèdres de Gromov), dont le bord est une courbe de Menger ou de Sierpiński.

## 1.5. MÉTRIQUES VISUELLES SUR $\partial X$

De même qu'un changement conforme de métrique sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, permet d'identifier son bord à celui de la boule euclidienne de rayon un, on peut modifier de manière «conforme» la métrique d'un espace $\delta$-hyperbolique $X$, afin que $X \cup \partial X$ soit le complété de $X$ pour cette nouvelle métrique. (Voir [G], [C-D-P], [C], pour plus de détails). Ainsi $\partial X$ hérite d'une métrique compatible avec sa topologie. Les métriques obtenues de cette manière ont la propriété de visibilité, c'est-à-dire:

1.5.1. DÉFINITION. Soit $x$ une origine dans $X$. Une métrique $d_{\partial X}$ sur $\partial X$ a la propriété de visibilité, si elle est reliée à celle de $X$ de la façon suivante: Il existe une constante $C \geqslant 1$ et un réel $t > 1$, tels que pour tous éléments $\xi, \xi'$ de $\partial X$:

$$C^{-1} t^{-d} \leqslant d_{\partial X}(\xi, \xi') \leqslant C t^{-d} .$$

avec

$$d = d_X(x, (\xi\xi')) .$$

Une telle métrique est appelée métrique visuelle de paramètres $(x, t)$.

L'énoncé précis est le suivant: ([G], §7.2, [C-D-P], chapitre 11):

1.5.2. THÉORÈME (Gromov). *Il existe un réel* $t_0 > 1$, *ne dépendant que de* $\delta$, *tel que pour tout* $t$ *appartenant à* $]1, t_0[$, *le bord de* $X$ *admette une métrique visuelle de paramètres* $(x, t)$.

1.5.3. *Remarques*

a) Pour les $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espaces, le résultat est plus fin: leur bord admet une métrique visuelle de paramètre $t$, quel que soit $t$ appartenant à $]1, e^b]$. Une manière de le montrer est d'utiliser les idées de W. J. Floyd [F]. Nous en proposerons une autre au paragraphe 2.5. Notons que $e^b$ est optimal car il l'est sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}(-b^2)$.

b) Deux métriques visuelles $d$ et $d'$ de paramètres respectifs $(x, t)$ et $(x', t')$ sont facilement comparables: Si $t = t'$, alors elles sont Lipschitz-équivalentes: il existe une constante $D \geqslant 1$, telle que:

$$D^{-1} d \leqslant d' \leqslant D d .$$

Sinon, elles sont Hölder-équivalentes: il existe une constante $D \geqslant 1$ et un réel $\alpha > 0$, tels que:

$$D^{-1} d^{\alpha} \leqslant d' \leqslant D d^{\alpha} .$$

Ici $\alpha$ est égal à $\log t' / \log t$.

c) D'après b), toute isométrie de $X$ est un homéomorphisme bi-Lipschitz du bord de $X$ muni d'une métrique visuelle.