# 2.1 Présentation par générateurs et relations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

au-dessus de $x, y, a, b$ tels que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$ et $\vec{b} = \lambda\vec{x} + \vec{y}$, alors $\varphi(f)(\vec{x}) = \varphi(h)(-\vec{y}) = \lambda\vec{x}$, donc $\varphi(f)$ est la multiplication par $\lambda$. D'autre part $\lambda = r(x, y; a, b)$; en effet si on envoie $x$ à l'infini et si on prend $y$ pour origine de la droite affine ainsi obtenue, les coordonnées de $a$ et $b$ sont respectivement 1 et $\lambda$, mais $r(\infty, 0; 1, \lambda) = \lambda$.

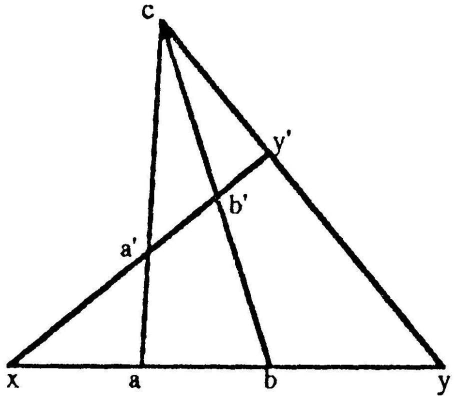


FIGURE 6

Pour achever la preuve, montrons que $\varphi : Aut(x) \to Aut(\varphi(x))$ est injective. Notons $(x, y; a, b)$ l'automorphisme de $x : (y \overset{b}{\to} x) \circ (x \overset{a}{\to} y)$, et prouvons que si $r(x, y; a, b) = r(x, y'; a', b')$, alors $(x, y; a, b) = (x, y'; a', b')$. On peut supposer que $a \neq b$ et $a' \neq b'$. Si $x, y, y'$ ne sont pas alignés, par l'invariance projective du birapport l'égalité $r(x, y; a, b) = r(x, y'; a', b')$ entraîne que les droites $\langle y, y' \rangle$, $\langle a, a' \rangle$ et $\langle b, b' \rangle$ sont concourrantes. Mais alors en utilisant les relations de définition de $\mathscr{G}_n$, on a successivement

$$(y' \overset{a'}{\to} x) \circ (x \overset{b'}{\to} y') \circ (y \overset{b}{\to} x) = (y' \overset{a'}{\to} x) \circ (y \overset{c}{\to} y') = (y \overset{a}{\to} x) ,$$

ce qui montre que $(x, y'; a', b')^{-1} \circ (x, y; a, b) = id_x$. Si enfin, $x, y, y'$ sont alignés, on applique deux fois ce qui précède en considérant $y''$ en dehors de la droite $\langle x, y \rangle$ et $a'', b''$ sur la droite $\langle x, y'' \rangle$ tels que $r(x, y; a, b) = r(x, y''; a'', b'')$. □

## 2. GROUPOÏDES ET GRASSMANNIENNES

### 2.1 PRÉSENTATION PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

On se propose de généraliser ce qui précède aux groupoïdes $\mathscr{V}_{n,l}$ de la définition 1 et aux grassmanniennes.

DÉFINITION 3. *Pour* $n \geqslant 3l - 1$, *on note* $\mathscr{V}'_{n,l}$ *le groupoïde décrit par générateurs et relations comme suit.*

*i) Les objets de* $\mathscr{V}'_{n,l}$ *sont les mêmes que ceux de* $\mathscr{V}_{n,l}$.

*ii) Les générateurs sont les isomorphismes linéaires* $E_1 \xrightarrow{u} E_2$ *où* $E_1$ *et* $E_2$ *sont transverses.*

*iii) Si* $\star$ *désigne la composition des morphismes dans* $\mathscr{V}'_{n,l}$, *les relations sont du type:* $v \star u = v \circ u$, *chaque fois que* $E_1 \xrightarrow{u} E_2$ *et* $E_2 \xrightarrow{v} E_3$ *sont deux isomorphismes tels que* $E_1, E_2$ *et* $E_3$ *soient en somme directe.*

DÉFINITION 4. *Pour* $n \geqslant 3l - 1$, *on introduit un troisième groupoïde* $\mathscr{G}_{n,l}$, *défini en terme de la géométrie de* $\mathbf{P}^n(F)$ *comme suit.*

*i) Les objets de* $\mathscr{G}_{n,l}$ *sont les sous-espaces projectifs de dimension* $l - 1$ *de l'espace projectif* $\mathbf{P}^n(F)$.

*ii) Les générateurs sont de la forme:* $f = (X \xrightarrow{A} Y)$ *où* $X, Y, A$ *sont trois sous-espaces de dimension* $l - 1$ *de* $\mathbf{P}^n(F)$, *2 à 2 disjoints et* $A \subset \langle X, Y \rangle \cong \mathbf{P}^{2l-1}(F)$; *ici* $\langle X, Y \rangle$ *désigne le sous-espace projectif engendré par* $X \cup Y$.

*iii) Les relations sont du type* $g \circ f = h$, *où* $f = (X \xrightarrow{A} Y)$, $g = (Y \xrightarrow{B} Z)$ *et* $h = (X \xrightarrow{C} Z)$ *sont tels que* $\dim \langle X, Y, Z \rangle = 3l - 1$ *et où* $C = \langle X, Z \rangle \cap \langle A, B \rangle$.

THÉORÈME 3. *Pour* $n \geqslant 3l - 1$, *les groupoïdes* $\mathscr{V}_{n,l}$ *et* $\mathscr{G}_{n,l}$ *sont isomorphes.*

Cela résulte de deux propositions.

PROPOSITION 2. *Quelque soit* $n \geqslant 3l - 1$, *le morphisme naturel* $\mathscr{V}'_{n,l} \to \mathscr{V}_{n,l}$ *est un isomorphisme.*

PROPOSITION 3. *Pour* $n \geqslant 3l - 1$, *les groupoïdes* $\mathscr{V}'_{n,l}$ *et* $\mathscr{G}_{n,l}$ *sont naturellement isomorphes.*

*Preuve de la proposition 2.* Le morphisme naturel $\mathscr{V}'_{n,l} \to \mathscr{V}_{n,l}$ est bijectif sur les objets. Le point crucial est de voir qu'il est bijectif sur les automorphismes. Noter que $\mathscr{V}'_{n,l}$ est connexe car, étant donnés deux sous-espaces $E_1$ et $E_2$ de dimension $l$ de $F^{n+1}$, il en existe un troisième qui leur est transverse. Si $E_1 \xrightarrow{u} E_2$ est un générateur de $\mathscr{V}'_{n,l}$, l'inverse de $u$ dans $\mathscr{V}'_{n,l}$ coïncide avec l'inverse $u^{-1}$ de $u$ dans $\mathscr{V}_{n,l}$. En effet soit $E_2 \xrightarrow{v} E_3$ avec $E_1$, $E_2$ et $E_3$ en position générale, on a successivement

$$(v \star u) \star u^{-1} = (v \circ u) \star u^{-1} = (v \circ u) \circ u^{-1} = v\,.$$

Tout morphisme $E \to E'$ dans $\mathscr{V}'_{n,l}$ s'écrit comme une composition $u_r \star u_{r-1} \star \cdots \star u_0$

$$E = E_0 \xrightarrow{u_1} E_1 \to \cdots \to E_{r-1} \xrightarrow{u_r} E_r = E' ,$$

où $E_i$ et $E_{i+1}$ sont transverses. Un tel morphisme a un représentant de la forme

$$E \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} E' ,$$

où $H$ est transverse à $E$ et $E'$.

Il suffit de le prouver pour $r = 3$. Dans ce cas particulier, on a l'assertion suivante quelque soit le corps $F$:

LEMME 1. *Dans la situation ci-dessus où* $r = 3$, *il existe* $H$ *de dimension* $l$ *tel que* $H, E_0, E_1, H, E_1, E_2$ *et* $H, E_2, E_3$ *soient respectivement en somme directe.*

Reportons la preuve du lemme et soit $w: E_2 \to H$, si on pose $v = u_3 \circ w^{-1}$ et $u = w \circ u_2 \circ u_1$, on a les relations

$$u_3 \star u_2 \star u_1 = u_3 \star (w^{-1} \star w) \star u_2 \star u_1$$
$$= (u_3 \star w^{-1}) \star ((w \star u_2) \star u_1) = (u_3 \circ w^{-1}) \star (w \circ u_2 \circ u_1) = v \star u ,$$

d'où la réduction.

Soit maintenant un diagramme

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dr, "v"] & \\ E \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & E \\ & H' \arrow[ur, "v'"'] & \end{tikzcd}$$

où $u$, $u'$, $v$ et $v'$ sont des générateurs de $\mathscr{V}'_{n,l}$. Il reste à montrer que, si un tel diagramme commute dans $\mathscr{V}_{n,l}$, alors il commute aussi dans $\mathscr{V}'_{n,l}$. Si $E$, $H$ et $H'$ sont en somme directe, on a successivement

$$u \star u'^{-1} = (u \circ u'^{-1}) = (v'^{-1} \circ v) = v'^{-1} \star v ,$$

d'où $v' \star u' = v \star u$. Sinon on considère $E \xrightarrow{u''} H'' \xrightarrow{v''} E$ de telle sorte que $v'' \circ u'' = v \circ u$ avec $E$, $H$, $H''$ et $E$, $H'$, $H''$ en somme directe, et on applique deux fois ce qui précède. □

*Preuve du lemme 1.* Soient $V_1 = E_0 \oplus E_1$, $V_2 = E_1 \oplus E_2$ et $V_3 = E_2 \oplus E_3$, on veut trouver un sous-espace de dimension $l$ de $F^{n+1}$ transverse aux $V_i$. En considérant un sous-espace $E$ de $F^{n+1}$ de dimension $3l$ contenant $V_2$, on se ramène facilement au cas où $dim(V_1 + V_2 + V_3) \leqslant 3l$. On peut alors écrire

$$V_1 + V_2 + V_3 = V_2 \oplus S \oplus T_1 \oplus T_3 ,$$

où $S \subset V_1 \cap V_3$, $T_1 \subset V_1$, $T_3 \subset V_3$ et $T_1$ (resp. $T_3$) est transverse à $V_3$ (resp. $V_1$). Soit $\alpha = dim S$, $\beta_1 = dim T_1$ et $\beta_3 = dim T_3$, il suffit alors de trouver un sous-espace $H'$ de $V_1 + V_2 + V_3$ de dimension $\alpha + \beta_1 + \beta_3$ transverse à chacun des $V_i$.

On a les inégalités $\alpha + \beta_1 \leqslant l$ et $\alpha + \beta_2 \leqslant l$; par suite, il existe des sous-espaces, en somme directe, $T'_1$ et $S'$ de $E_2$ (resp. $T'_3$ et $S''$ de $E_1$) vérifiant les conditions: $dim T'_1 = \beta_1$, $dim T'_3 = \beta_3$, $dim S' = dim S'' = \alpha$, $(T'_1 \oplus S') \cap V_1 = \{0\}$ et $(T'_3 \oplus S'') \cap V_3 = \{0\}$.

Soit alors $\tilde{S}$ un sous-espace de $S \oplus S' \oplus S''$, de dimension $\alpha$, transverse à $S \oplus S'$, $S \oplus S''$ et $S' \oplus S''$. Soit de même $\tilde{T}_1$ (resp. $\tilde{T}_3$) un sous-espace de $T_1 \oplus T'_1$ (resp. $T_3 \oplus T'_3$) de dimension $\beta_1$ (resp. $\beta_3$) transverse à $T_1$ et $T'_1$ (resp. $T_3$ et $T'_3$). La somme directe $\tilde{S} \oplus \tilde{T}_1 \oplus \tilde{T}_3$ est le sous-espace $H'$ cherché. □

*Preuve de la proposition 3.* Soit $p: F^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbf{P}^n(F)$ la projection, on considère la bijection $\psi: Obj(\mathscr{G}'_{n,l}) \to Obj(\mathscr{G}_{n,l})$ donnée par $\psi(E) = p(E \backslash \{0\})$. On va prolonger $\psi$ en une bijection notée aussi $\psi$ de l'ensemble des générateurs de $\mathscr{V}'_{n,l}$ sur l'ensemble des générateurs de $\mathscr{G}_{n,l}$ respectant les relations.

Si $u: E \to H$ est un générateur de $\mathscr{V}'_{n,l}$, le sous-espace $J = \{u(x) - x: x \in E\}$ de $F^{n+1}$ est de dimension $l$ car $E \cap H = \{0\}$. Posons alors

$$\psi(E \xrightarrow{u} H) = X \xrightarrow{A} Y ,$$

où $X = p(E \backslash \{0\})$, $Y = p(H \backslash \{0\})$ et $A = p(J \backslash \{0\})$. Cette application est bijective; on a en effet

$$\psi^{-1}(X \xrightarrow{A} Y) = p^{-1}(X) \xrightarrow{u} p^{-1}(Y),$$

où pour $x \in p^{-1}(X), u(x)$ est l'unique élément $y$ de $p^{-1}(Y)$ tel que $p(y - x) \in A$: noter qu'il existe une unique droite projective $\Delta$ passant par $p(x)$ et rencontrant $A$ et $Y$. Lorsque $l = 2$, penser à la surface réglée engendrée par trois droites en position générale.

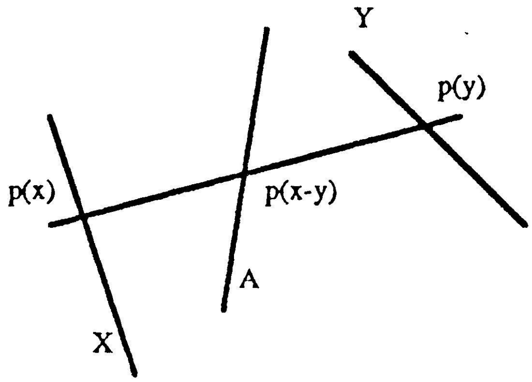


FIGURE 7

Il reste à voir que $\psi$ respecte les relations. Soit $E_1, E_2, E_3$ en somme directe et soit de plus $u_1 : E_1 \to E_2$ et $u_2 : E_2 \to E_3$; posons pour $i = 1, 2$

$$J_i = \{u_i(x) - x : x \in E_i\} .$$

Comme

$$(u_2 \circ u_1)(x) - x = (u_2(u_1(x)) - u_1 x) + (u_1(x) - x) ,$$

on a

$$\{(u_2 \circ u_1)(x) - x : x \in E_1\} \subset (J_1 \oplus J_2) \cap (E_1 \oplus E_2) .$$

L'égalité résulte de l'égalité des dimensions. $\square$

## 2.2 INVARIANTS PROJECTIFS DE QUADRUPLETS DE SOUS-ESPACES DE DIMENSION $l - 1$ DE $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$

On peut formuler dans le cadre de ce qui précède des invariants projectifs de quatre sous-espaces de dimension $l - 1$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ qui généralisent le birapport de quatre points de $\mathbf{P}^1(F)$.

Pour cela, revenons au groupoïde $\mathscr{V}_{n,l}$. On considère la réunion disjointe des groupes d'automorphismes de $\mathscr{V}_{n,l}$

$$\mathbf{A} := \coprod_{E \subset F^{n+1}}^{\dim E = l} GL(E) .$$

Le groupe linéaire $GL(n + 1, F)$ opère par conjugaison dans $\mathbf{A}$. Pour $f \in \mathbf{A}$, soit

$$X^l - a_1(f) X^{l-1} + \cdots + (-1)^l a_l(f) ,$$