1.1 Présentation d'un groupoïde par générateurs et relations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

L'Enseignement Mathématique, t. 41 (1995), p. 257-280

BIRAPPORT ET GROUPOÏDES

par Jean-Louis CATHELINEAU

Soit F un corps et n un entier supérieur ou égal à 2, on associe à l'espace projectif $\mathbf{P}^n(F)$ un groupoïde; ce groupoïde, défini par générateurs et relations de manière purement géométrique, fait apparaître très naturellement le groupe multiplicatif du corps et le classique birapport. Une structure analogue existe plus généralement pour les grassmanniennes. Ces considérations amènent à une présentation géométrique élémentaire de l'homologie du groupe linéaire en terme de grassmanniennes, en analogie avec la situation topologique classique, et illustre aussi l'intérêt (voir entre autres [3, 10]) de considérer pour un groupe discret G, des catégories, autres que la classique catégorie à un objet, dont le réalisé est aussi un espace d'Eilenberg-Maclane $K(G, 1)$. Ce qui suit espère montrer la dimension géométrique de ce point de vue, dans la ligne des idées de F. Klein. On discute aussi quelques extensions naturelles du birapport pour certaines configurations de points ou de sous-espaces de l'espace projectif.

Ces résultats m'ont été inspirés par quelques aspects d'un travail de Goncharov sur la conjecture de Zagier [9, 8, 4].

1. Groupoïdes et espaces projectifs

1.1 Présentation d'un groupoïde par générateurs et relations

Rappelons qu'une *petite catégorie* est une catégorie dont les objets forment un ensemble, et qu'un *groupoïde* est une petite catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes. Un groupoïde est dit *connexe* si, entre deux de ses objets, il existe toujours un morphisme. Dans la suite tous les groupoïdes sont supposés connexes. Dans un groupoïde, les automorphismes d'un objet forment un groupe et tous ces groupes d'automorphismes sont isomorphes. Un groupe s'identifie à un groupoïde avec un seul objet et tout groupoïde est équivalent, au sens des catégories, à un tel groupoïde.

Mais il faut se garder de croire que la théorie des groupoïdes se réduit à celle des groupes. Pour un aperçu général sur la théorie des groupoïdes et leurs applications on renvoie à l'exposé de R. Brown [3].

Comme la notion de groupoïde généralise celle de groupe, il n'est pas surprenant que l'on puisse présenter un groupoïde par générateurs et relations.

Pour cela considérons les données suivantes

i) un ensemble d'*objets* X,

ii) un ensemble $\mathscr{F}$ de *générateurs* donné par des «flèches» $f : x \to y$ entre les éléments de X,

iii) un ensemble $\mathscr{R}$ de *relations* entre les éléments de $\mathscr{F}$ du type

$$f_r^{\varepsilon_r} \circ f_{r-1}^{\varepsilon_{r-1}} \circ \cdots \circ f_1^{\varepsilon_1} = id_x (\varepsilon_j = \pm 1) ,$$

où l'extrémité de la flèche f_i coïncide avec l'origine de f_{i+1}.

PROPOSITION 1. *Il existe, à isomorphisme près, un et un seul groupoïde $\mathscr{G}$, d'ensemble d'objets X, muni d'une application $\phi : \mathscr{F} \to Mor\, \mathscr{G}$ compatible avec les objets, satisfaisant de plus à la propriété universelle suivante:*

«Pour tout groupoïde $\mathscr{H}$, pour toute application $h : X \to Obj\, \mathscr{H}$, et pour toute application $\psi : \mathscr{F} \to Mor\, \mathscr{H}$ compatible avec h vérifiant: $\psi(f_r)^{\varepsilon_r} \circ \psi(f_{r-1})^{\varepsilon_{r-1}} \circ \cdots \circ \psi(f_1)^{\varepsilon_1} = id_{h(x)}$ pour chaque relation de $\mathscr{R}$, il existe un unique morphisme de groupoïdes

$$\tilde{\psi} : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$$

tel que

$$\tilde{\psi} \circ \phi = \psi \text{ .»}$$

Esquissons la preuve: on commence par construire le groupoïde «libre» $\mathscr{L}$ engendré par les données X et $\mathscr{F}$. Pour ce faire, on introduit le graphe orienté Γ dont les *sommets* sont les éléments de X et dont les *arêtes* sont de l'un des types $x \xrightarrow{f} y$ ou $y \xrightarrow{\hat{f}} x$, pour $f : x \to y$ élément de $\mathscr{F}$ (on suppose que ce graphe est connexe). Le groupoïde $\mathscr{L}$ a alors pour objets les éléments de X et, pour morphismes, les classes d'équivalences de *chemins orientés* sur le graphe Γ, relativement à la relation d'équivalence engendrée par les relations élémentaires suivantes: deux chemins sont élémentairement équivalents si l'on passe de l'un à l'autre en remplaçant une séquence

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\hat{f}} x$ (resp. $y \xrightarrow{\hat{f}} x \xrightarrow{f} y$) par x (resp. y). La composition dans $\mathscr{L}$ s'obtient en composant les chemins; l'inverse de la classe de $x \xrightarrow{f} y$ est alors la classe de $y \xrightarrow{\hat{f}} x$.

Le groupoïde $\mathscr{G}$ se déduit de $\mathscr{L}$ en passant au quotient par les relations $\mathscr{R}$. Plus précisément, les relations $\mathscr{R}$ engendrent une famille de groupes $(G_x)_{x \in X}$, où G_x est un sous-groupe de $Aut_{\mathscr{L}}(x)$, satisfaisant à la condition

(*) pour tout morphisme $f : x \to y$ de $\mathscr{L}$, la conjugaison: $Aut_x \to Aut_y$, $g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$, induit une bijection de G_x sur G_y;

on obtient alors $\mathscr{G}$ à partir de $\mathscr{L}$ en passant au quotient par la relation d'équivalence suivante sur les morphismes de $\mathscr{L}$

(**) pour $f, g \in Mor(x, y)$, $f \sim g$ si $g^{-1} \circ f \in G_x$. □

DÉFINITION 1. *Pour* F *un corps et* $l \geqslant 1$, $\mathscr{V}_{n,l}$ *désigne le groupoïde dont les objets sont les sous-espaces de dimension* l *de* F^{n+1} *et les morphismes, les isomorphismes linéaires entre ces espaces. Pour* $l = 1$, *on note plus simplement ce groupoïde* $\mathscr{V}_n$.

Dans les paragraphes 1.2 et 2.1, on donne pour $n \geqslant 3l - 1$ une présentation par générateurs et relations du groupoïde $\mathscr{V}_{n,l}$, en termes de géométrie projective.

1.2 LE GROUPOÏDE DES POINTS DE $\mathbf{P}^n(F)$

Dans la suite, F est un corps commutatif quelconque, en particulier on n'exclut pas le corps à deux éléments.

DÉFINITION 2. *Pour* $n \geqslant 2$, *on considère le groupoïde* $\mathscr{G}_n$ *défini par générateurs et relations comme suit:*

i) Les objets de $\mathscr{G}_n$ *sont les points de* $\mathbf{P}^n(F)$.

ii) L'ensemble des générateurs $\mathscr{F}$ *est constitué des flèches* $f = (x \xrightarrow{a} y)$, *où* x *et* y *sont des points distincts de* $\mathbf{P}^n(F)$ *et* a *est un point de la droite* $\langle x, y \rangle$ *distinct de* x *et* y.

iii) Les relations $\mathscr{R}$ *sont du type* $h = g \circ f$ *où* $f = (x \xrightarrow{a} y)$, $g = (y \xrightarrow{b} z)$ *et* $h = (x \xrightarrow{c} z)$ *sont comme sur la figure 1, c'est-à-dire que* x, y *et* z *sont en position générale et* c *est l'intersection des droites* $\langle x, z \rangle$ *et* $\langle a, b \rangle$.