

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

in $C(X)$ this readily implies that $n_k^{-1} \sum_{i=0}^{n_k-1} f \circ \varphi^i(x_0)$ converges for all $f \in C(X)$; let c_f be the limit corresponding to f . Then it can be verified that $\Lambda: C(X) \rightarrow \mathbf{R}$ defined by $\Lambda(f) = c_f$, for all $f \in C(X)$, is a φ -invariant integral on $C(X)$. Also clearly Λ is not identically zero and therefore by our observations above, the support, say X' , is a nonempty closed φ -invariant subset of X and further $C(X')$ admits an integral with full support (namely X') which is invariant under the restriction of φ to X' . Replacing X as in the hypothesis by X' we may without loss of generality assume that $C(X)$ admits a φ -invariant integral whose support is X ; in the rest of the argument we let Λ be any such integral.

Now suppose that there do not exist any recurrent points for φ . Let $\rho(\cdot, \cdot)$ be the metric on X . Let θ be the function on X defined by $\theta(x) = \inf\{\rho(\varphi^i(x), x) \mid i = 1, 2, \dots\}$, for all $x \in X$. There being no recurrent points means that $\theta(x) > 0$ for all $x \in X$. For each natural number k let $E_k = \{x \in X \mid \theta(x) \geq 1/k\}$. Then each E_k is a closed subset of X and $X = \cup E_k$. Therefore by the Baire category theorem there exists a k such that E_k has an interior point in X . In particular, there exists an open ball, say A , of radius at most $1/3k$ contained in E_k . The definition of E_k and the condition on the radius of A then imply that the sets $\varphi^i(A)$, $i \in \mathbf{Z}$, are mutually disjoint. Now let $x \in A$ and let $f \in C(X)^+$ be such that $f(x) > 0$ and the support of f (the closure of the set $\{y \in X \mid f(y) > 0\}$) is contained in A . For each natural number n let $S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f \circ \varphi^i \in C(X)$. The disjointness of $\varphi^i(A)$, $i \in \mathbf{Z}$, implies that, for any n , $\|S_n(f)\| = \|f\|$. Also, by the φ -invariance of Λ we have $\Lambda(S_n(f)) = n\Lambda(f)$. Hence $\Lambda(f) = \Lambda(S_n(f))/n \leq \|S_n(f)\| \Lambda(1_X)/n = \|f\| \Lambda(1_X)/n$ for all n , where 1_X denotes the constant function with value 1. But this implies that $\Lambda(f) = 0$ contradicting the assumption that the support of Λ is the whole of X . This proves the proposition.

Acknowledgement: Thanks are due to J. Aaronson and M.G. Nadkarni for a discussion on recurrent points and to Gopal Prasad and Nimish Shah for useful comments on an earlier version.

REFERENCES

- [DM-1] DANI, S.G. and G.A. MARGULIS. Values of quadratic forms at primitive integral points. *Invent. Math.* 98 (1989), 405-424.
- [DM-2] DANI, S.G. and G.A. MARGULIS. Values of quadratic forms at integral points; an elementary approach. *L'Enseignement Math.* 36 (1990), 143-174.

- [DM-3] DANI, S.G. and G.A. MARGULIS. Limit distributions of orbits of unipotent flows and values of quadratic forms. *Advances in Soviet Math.* 16 (1993), 91-137.
- [DGS] DENKER, M., C. GRILLENBERGER and K. SIGMUND. *Ergodic Theory on Compact Spaces*. Springer-Verlag, 1976.
- [D] DIEUDONNÉ, J. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, 1969.
- [H] HENLE, J.M. *An Outline of Set Theory*. Springer-Verlag, 1986.
- [M] MAÑÉ, R. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer-Verlag, 1983.
- [M-1] MARGULIS, G.A. Formes quadratiques indéfinies et flots unipotents sur les espaces homogènes. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 304 (1987), 249-253.
- [M-2] ——— Discrete subgroups and ergodic theory; in: *Number Theory, Trace Formulas and Discrete Subgroups*. Academic Press, 1989.
- [M-3] ——— Orbits of group actions and values of quadratic forms at integral points. *Israel J. Math.* 3 (1990), 127-150.
- [M-4] ——— Dynamical and ergodic properties of subgroup actions on homogeneous spaces with applications to number theory; in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Kyoto 1990)*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo; Springer-Verlag, 1991.
- [MZ] MONTGOMERY, D. and L. ZIPPIN. *Topological Transformations Groups*. Interscience Publishers, New York, 1955.
- [R] RATNER, M. Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows, *Duke Math. J.* 63 (1991), 235-280.
- [S] SIKORAV, J.-C. Valeurs des formes quadratiques indéfinies irrationnelles; in *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987-88*, Progress in Math. 81, Birkhauser 1990.

(Reçu le 28 avril 1993)

S. G. Dani

School of Mathematics
Tata Institute of Fundamental Research
Homi Bhabha Road
Bombay 400 005
India