

# V. Autres propriétés des polynômes $Q_a$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

*Démonstration.* On peut évidemment supposer que l'on a  $d^0\psi_1 \leq d^0\psi_2 \leq d^0\psi_3$ . La relation  $\lambda \circ \psi = 0$  s'écrit  $\psi_3(\psi_3 - \psi_1\psi_2) = 4 - \psi_1^2 - \psi_2^2$ , d'où l'on déduit  $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \leq d^0\psi_2$ . Supposons que l'on ait  $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \geq d^0\psi_3$ . On a alors  $d^0\psi_2 = d^0\psi_3$  et  $d^0\psi_1 + d^0\psi_2 + d^0\psi_3 \leq 2d^0\psi_3$  et, donc,  $\psi_1 = c \in R$ . Par une procédure de descente analogue à celle de la démonstration du théorème II.4, par composition par divers  $\Phi_\tau$  on peut faire décroître  $\deg \psi$  tant que l'une de ses composantes n'est pas constante.

**THÉORÈME 5.** *Pour  $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$ ,  $Q_\sigma \equiv 0$  si et seulement si  $\sigma$  n'est pas injectif.*

*Démonstration.* Supposons  $\sigma$  non injectif. En vertu de la proposition 3, il existe  $\mu \in \text{Aut } F$  tel que  $\sigma\mu(b) = e$ . Or, on sait que  $Q_{\sigma\mu} = Q_\mu Q_\sigma \circ \Phi_\mu$ . Or, il est facile de vérifier que  $Q_{\sigma\mu} = 0$ . Comme  $Q_\mu \equiv 1$ , cela implique  $Q_\sigma \equiv 0$ .

Supposons maintenant que l'on ait  $Q_\sigma \equiv 0$ . En vertu du lemme précédent, il existe  $\tau \in \text{Aut } F$  tel que la première composante de  $\Phi_{\tau\sigma}$  soit constante. Le lemme II.2 montre alors que  $\tau\sigma(a) = e$ , ce qui prouve que  $\sigma$  n'est pas injective.

## V. AUTRES PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES $Q_\sigma$

**THÉORÈME 1.** *Pour tout  $\sigma \in \text{End } F$ , on a les faits suivants:*

$$1^\circ) \quad Q_\sigma(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\det \sigma)^2 \quad \text{pour tous } \varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}.$$

$$2^\circ) \quad \lambda \text{ divise le polynôme } \det \Phi'_\sigma - (\det \sigma)Q_\sigma.$$

*Démonstration.* Observons d'abord que si  $p$  et  $q$  sont deux entiers rationnels on a

$$P_{ap\ bq}(x, y, z) = zu_p(x)u_q(y) - xu_p(x)u_{q-1}(y) - yu_{p-1}(x)u_q(y) + 2u_{p-1}(x)u_{q-1}(y).$$

Si  $\varepsilon$  et  $\eta$  valent  $\pm 1$ , il est facile de vérifier que

$$P_{ap\ bq}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = 2\varepsilon^p\eta^q$$

et de calculer le gradient de  $P_{ap\ bq}$ :

$$P'_{ap\ bq}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\varepsilon p(p-q), \eta q(q-p), \varepsilon\eta pq)\varepsilon^p\eta^q.$$

Considérons maintenant un élément de  $\sigma$  de  $\text{End } F$  dont la matrice est  $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ . Ce qui précède montre que le point  $(2, 2, 2)$  est point fixe pour  $\Phi_\sigma$  et que l'ensemble  $\{(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta); \varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}\}$  est globalement invariant par  $\Phi_\sigma$ .

Démontrons la première assertion. Différentions deux fois la relation  $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$  au point  $\omega = (2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta)$ . On obtient

$${}^t\Phi'_\sigma(\omega)\lambda''(\Phi(\omega))\Phi'_\sigma(\omega) = \lambda''(\omega)Q_\sigma(\omega)$$

en ayant tenu compte de ce que  $\lambda(\omega)$ ,  $\lambda'(\omega)$  et  $\lambda'(\Phi_\sigma(\omega))$  sont nuls. Par ailleurs,  $\Phi_\sigma - (P_{apbq}, P_{arbs}, P_{ap+r bq+s})$  est un multiple de  $\lambda$ . Par conséquent, on obtient  $\Phi'_\sigma(\omega)$  en différentiant en  $\omega$  la fonction  $(P_{apbq}, P_{arbs}, P_{ap+r bq+s})$ . Tous calculs faits on obtient la première assertion.

Pour démontrer la seconde assertion, nous allons montrer que le polynôme  $\det \Phi'_\sigma - (\det \sigma)Q_\sigma$  s'annule en suffisamment de points de  $\Omega$ .

Considérons le point  $\omega(t, u) = (2 \cos t, 2 \cos u, 2 \cos (t + u))$  de  $\Omega$ . Son image par  $\Phi_\sigma$  est le point  $\omega(pt + qu, rt + su)$  que nous noterons  $\omega \circ \tilde{\sigma}(t, u)$ .

Par différentiation de la relation  $\Phi_\sigma \circ \omega = \omega \circ \tilde{\sigma}$ , on obtient

$$(\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} \wedge (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u} = (\det \sigma) \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \circ \tilde{\sigma} \right) \wedge \left( \frac{\partial \omega}{\partial u} \circ \tilde{\sigma} \right).$$

Par ailleurs, on établit facilement la relation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \wedge \frac{\partial \omega}{\partial u} = -\lambda' \circ \omega$$

où l'on a fait les identifications nécessaires.

La relation  $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$  donne par différentiation, en observant que  $\lambda \circ \omega = 0$ ,

$$(\lambda' \circ \Phi_\sigma \circ \omega) (\Phi'_\sigma \circ \omega) V = (Q_\sigma \circ \omega) (\lambda' \circ \omega) \cdot V$$

où  $V$  est un vecteur arbitraire. Compte tenu des relations précédentes, ceci s'écrit encore

$$\det \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \circ \tilde{\sigma}, \frac{\partial \omega}{\partial u} \circ \tilde{\sigma}, (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot V \right) = (Q_\sigma \circ \omega) \det \left( \frac{\partial \omega}{\partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial u}, V \right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \det \left( (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t}, (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u}, (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot V \right) \\ = (\det \sigma) (Q_\sigma \circ \omega) \det \left( \frac{\partial \omega}{\partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial u}, V \right). \end{aligned}$$

Ceci montre l'égalité  $\det(\Phi'_\sigma \circ \omega) = (\det \sigma) (Q_\sigma \circ \omega)$  en chaque point où le gradient de  $\omega$  n'est pas nul.

## THÉORÈME 2.

1.  $Q_\sigma(0, 0, 0)$  vaut 0 ou 1 selon que  $\det \sigma$  est pair ou impair.
2.  $\Phi_\sigma(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$  si et seulement si  $\det \sigma$  est impair.
3.  $Q'_\sigma(0, 0, 0) = 0$ .
4. Si  $\det \sigma$  est impair,  $Q''_\sigma(0, 0, 0)$  est diagonal négatif.

*Démonstration.* Nous allons calculer  $\Phi_\sigma(0, 0, z)$ . Pour ce faire, considérons  $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$  tel que  $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ , avec  $\lambda + \lambda^{-1} = z$ . On a évidemment  $\varphi(a)^2 = \varphi(b)^2 = -1$  et, donc tout produit d'un certain nombre de  $\varphi(a)$  et de  $\varphi(b)$  est réductible à l'une des formes  $\pm \varphi((ab)^n)$ ,  $\pm \varphi((ab)^n a)$ ,  $\pm \varphi((ba)^n)$  ou  $\pm \varphi((ba)^n b)$  dont les traces respectives sont  $\pm t_n(z)$ , 0,  $\pm t_n(z)$  et 0 (où  $t_n$  est un polynôme de Chebyshev de première espèce, cf. II).

Ceci nous conduit à définir le procédé suivant de réduction d'un élément de  $F$ : on remplace autant de fois qu'il est possible  $a^2$  et  $b^2$  par  $-1$ . Ainsi le mot  $aba^2b^3$  donne  $-a$ .

Réduisons ainsi les mots  $\sigma(a)$  et  $\sigma(b)$ . On obtient respectivement  $\varepsilon \bar{\sigma}(a)$  et  $\eta \bar{\sigma}(b)$  où  $\varepsilon$  et  $\eta$  valent  $\pm 1$ . Nous pouvons dresser le tableau suivant qui donne, pour les différentes valeurs possibles de  $\bar{\sigma}(a)$  et  $\bar{\sigma}(b)$ , en première ligne,  $\Phi_\sigma(0, 0, z)$  et, en seconde,  $Q_\sigma(0, 0, z)$  en termes des polynômes de Chebyshev  $t$  et  $u$  en la variable  $z$ .

$\bar{\sigma}(b)$	$(ab)^n$	$(ab)^n a$	$(ba)^n$	$(ba)^n b$
$\bar{\sigma}(a)$				
$(ab)^m$	$(t_m, t_n, t_{m+n})$ 0	$(t_m, 0, 0)$ $u_m^2$	$(t_m, t_n, t_{m-n})$ 0	$(t_m, 0, 0)$ $u_m^2$
$(ab)^m a$	$(0, t_n, 0)$ $u_n^2$	$(0, 0, -t_{m-n})$ $u_{m-n}^2$	$(0, t_n, 0)$ $u_n^2$	$(0, 0, t_{m+n+1})$ $u_{m+n+1}^2$

$(ba)^m$	$(t_m, t_n, t_{m-n})$ 0	$(t_m, 0, 0)$ $u_m^2$	$(t_m, t_n, t_{m+n})$ 0	$(t_m, 0, 0)$ $u_m^2$
$(ba)^m b$	$(0, t_n, 0)$ $u_n^2$	$(0, 0, t_{m+n+1})$ $u_{m+n+1}^2$	$(0, t_n, 0)$ $u_n^2$	$(0, 0, -t_{m-n})$ $u_{m-n}^2$

On observe que  $Q_\sigma(0, 0, z) = u_\nu(z)^2$  où  $\nu = \det \bar{\sigma}$ . Il est clair, par ailleurs, que  $\det \sigma$  et  $\det \bar{\sigma}$  ont même parité. La première assertion résulte alors de ce que  $u_n(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$ .

La seconde assertion résulte de l'examen du tableau, compte tenu de ce que  $t_n(0) = 2 \cos \frac{n\pi}{2}$ .

La troisième assertion résulte simplement de la parité de  $u_n^2$ .

Démontrons la dernière assertion. D'abord, il est facile de déterminer  $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$  et  $\Phi_\sigma(0, y, 0)$ . En effet soit  $\tau = (a^{-1}, ab) \in \text{End } F$ . On a  $\Phi_\tau(x, y, z) = (x, z, y)$  et par conséquent  $\Phi_{\sigma\tau}(x, y, z) = \Phi_\sigma(x, z, y)$ , ce qui permet par le procédé précédent de déterminer  $\Phi_\sigma(0, y, 0)$ . De la même façon pour calculer  $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$  on utilise  $\tau = (ab, b^{-1})$ .

Supposons donc que  $\det \sigma = 1 \pmod{2}$ . Ce qui précède montre que deux des composantes de chacune des fonctions  $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$ ,  $\Phi_\sigma(0, y, 0)$  et  $\Phi_\sigma(0, 0, z)$  sont nulles alors que les troisièmes sont de la forme  $\pm p_{n_1}(x)$ ,  $\pm p_{n_2}(y)$ ,  $\pm p_{n_3}(z)$  respectivement, les entiers  $n_1, n_2, n_3$  étant impairs. Par ailleurs, en vertu du théorème 1, compte tenu de  $Q_\sigma(0, 0, 0) = 1$ , on a  $\det \Phi'_\sigma(0, 0, 0) = 1 \pmod{2}$ . Comme  $p'_{n_i}(0) = n_i \sin \frac{n_i\pi}{2} \neq 0$  (pour  $i = 1, 2, 3$ ),

on en déduit que la matrice  $\Phi'_\sigma(0, 0, 0)$  a un terme non nul et un seul aussi bien dans chaque ligne que dans chaque colonne et que ses termes non nuls sont, aux signes près,  $n_1, n_2$  et  $n_3$ . Autrement dit  ${}^t\Phi'_\sigma(0, 0, 0)\Phi'_\sigma(0, 0, 0)$  est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des carrés de nombres impairs.

Différentions maintenant deux fois à l'origine la relation  $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$ . On obtient

$${}^t\Phi'_\sigma(0, 0, 0)\lambda''(0)\Phi'_\sigma(0, 0, 0) = \lambda''(0) - 4Q''_\sigma(0, 0, 0)$$

en ayant tenu compte des relations  $\lambda(0, 0, 0) = -4$  et  $\lambda'(0, 0, 0) = 0$ . La

conclusion résulte de  $\lambda''(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Prenons un exemple:  $\sigma = (aba^2b^2a, aba^3bab)$ . Calculons  $\Phi_\sigma(0, 0, z)$ . La réduction de  $\sigma$  donne  $(aba, -(ab)^3)$  donc

$$\Phi_\sigma(0, 0, z) = (0, -t_3(z), 0) = (0, 3z - z^3, 0)$$

et

$$Q_\sigma(0, 0, z) = u_3(z)^2 = (z^2 - 1)^2.$$

Pour calculer  $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$ , multiplions  $\sigma$  par  $(ab, b^{-1})$ , on obtient  $(babab, bab)$ , qui est réduit. Donc

$$\Phi_\sigma(x, 0, 0) = (0, 0, -t_1(x)) = (0, 0, -x)$$

et

$$Q_\sigma(x, 0, 0) = u_1(x)^2 = 1.$$

De façon analogue, on obtient

$$\Phi_\sigma(0, y, 0) = (p_3(y), 0, 0) = (y^3 - 3y, 0, 0)$$

et

$$Q_\sigma(0, y, 0) = (y^2 - 1)^2.$$

Ensuite on a

$$-2Q''_\sigma(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - I$$

d'où

$$Q''_\sigma(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

## VI. CAS D'UN GROUPE LIBRE À PLUS DE DEUX GÉNÉRATEURS

Avant de passer à la généralisation partielle de ce qui précède, nous avons besoin d'un certain nombre de lemmes sur  $SL(2, \mathbb{C})$ .