IV. Etude des relations $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ et $Q_\sigma = 0$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

THÉORÈME 4. *$\mathscr{A}$ est le groupe engendré par* $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma$ *et* ρ.

Démonstration. Il suffit d'appliquer de façon répétitive le lemme précédent pour se ramener au lemme 2.

THÉORÈME 5. *L'ensemble des* $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$ *tels que* $Q_\sigma = 1$ *est l'ensemble des automorphismes de* F.

Démonstration. Dire que $Q_\sigma = 1$ équivaut à dire $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$. Si $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$, le lemme 3 permet de montrer l'existence d'un $\tau \in <\alpha, \beta, \gamma>$ tel que $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma \in \{\theta, \rho\}$. Mais, en vertu des lemmes II.3 et II.4, on a alors $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$. Il en résulte (théorème II.5) que $\tau \circ \sigma$ est un automorphisme, donc aussi σ.

LEMME 6. *Si* i_w *désigne l'automorphisme intérieur* $u \to wuw^{-1}$ *de* F. *On a*

$$i_a = \beta\alpha\beta\gamma\beta\gamma\alpha\beta \quad et \quad i_b = \alpha i_a \alpha \,.$$

Démonstration. Elle se fait par vérification directe.

THÉORÈME 7. *L'ensemble des automorphismes de* F *est le groupe engendré par* α, β *et* γ.

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}\, F$. Alors $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$. Comme précédemment, il existe $\tau \in <\alpha, \beta, \gamma>$ tel que $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$. Le théorème II.1 montre alors $\tau \circ \sigma$ est soit un automorphisme intérieur, soit un automorphisme intérieur composé avec (a^{-1}, b^{-1}), qui n'est autre que $(\alpha\beta)^2$. Le théorème résulte alors du lemme précédent.

Remarque. Ce théorème est un résultat ancien de Nielsen [5], [6], mais la démonstration que nous en donnons ne fait pas appel à la délicate théorie de la réduction de Nielsen.

IV. ETUDE DES RELATIONS $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ ET $Q_\sigma = 0$.

Notons F^* l'ensemble des éléments w de F qui sont image d'un générateur par un automorphisme de F.

THÉORÈME 1. *Soit* σ *et* τ *deux endomorphismes de* F *tels que* $\sigma(a), \sigma(b)$ *et* $\sigma(ab)$ *soient dans* F^*. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

1°) $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$

2°) $\tau(a), \tau(b)$ *et* $\tau(ab)$ *sont conjugués respectivement à* $\sigma(a)$ *ou* $\sigma(a)^{-1}, \sigma(b)$ *ou* $\sigma(b)^{-1}, \sigma(ab)$ *ou* $\sigma(ab)^{-1}$.

Démonstration. Il est clair que la seconde assertion implique la première, et ce sans qu'il soit nécessaire de faire d'hypothèses sur σ.

Supposons que l'on ait $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ et $\sigma(a) = \mu(a), \sigma(b) = \nu(b)$ et $\sigma(ab) = \xi(ab)$ (où μ, ν et ξ sont des automorphismes de F). On a alors $\Phi_{\mu^{-1}\sigma} = \Phi_{\mu^{-1}\tau}$, d'où en vertu du lemme II.4, $\mu^{-1}\tau(a) = ua^{\pm 1}u^{-1}$ pour un $u \in F$. Par suite $\tau(a) = \mu(u)\sigma(a)^{\pm 1}\mu(u)^{-1}$. On opère de même pour $\tau(b)$ et $\tau(ab)$.

THÉORÈME 2. *Pour des automorphismes* σ *et* τ *de* F, *les assertions suivantes sont équivalentes:*

1°) $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$

2°) $\tilde{\sigma} = \pm \tilde{\tau}$

3°) $\tau = \sigma i_w$ *ou* $\tau = \sigma(\alpha\beta)^2 i_w$ *pour un* $w \in F$.

Démonstration. L'équivalence des assertions 1°) et 3°) est une simple reformulation du théorème II.1. L'équivalence de ces assertions avec la seconde résulte de la caractérisation, en termes de leurs matrices, des automorphismes intérieurs de F ([6]).

PROPOSITION 3. *Si* σ *est un endomorphisme de* F, *non injectif, il existe deux entiers* m *et* n *et un élément* w *de* F *tel que* $\sigma(a) = w^m$ *et* $\sigma(b) = w^n$.

Démonstration. On utilise la théorie de la réduction de Nielsen ([6], [7]). Etant donné $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$ arbitraire, il existe un automorphisme μ de F tel que l'une des éventualités suivantes se produise:

1°) Le couple $(\sigma\mu(a), \sigma\mu(b))$ est réduit au sens de Nielsen,

2°) $\sigma\mu(a)$ est réduit au sens de Nielsen et $\sigma\mu(b) = e$.

3°) $\sigma\mu(a) = \sigma\mu(b) = e$.

Dans le premier cas $\sigma\mu$ est injectif, d'où la proposition.

LEMME 4. *Soit* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in (R[x, y, z])^3$ *(où* R *est un domaine d'intégrité de caractéristique nulle) tel que l'on ait* $\lambda \circ \psi = 0$. *Alors, il existe* $\tau \in \mathrm{Aut}\, F$ *tel que* $\Phi_\tau \circ \psi$ *ait sa première composante constante.*

Démonstration. On peut évidemment supposer que l'on a $d^0\psi_1 \leqslant d^0\psi_2 \leqslant d^0\psi_3$. La relation $\lambda \circ \psi = 0$ s'écrit $\psi_3(\psi_3 - \psi_1\psi_2) = 4 - \psi_1^2 - \psi_2^2$, d'où l'on déduit $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \leqslant d^0\psi_2$. Supposons que l'on ait $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \geqslant d^0\psi_3$. On a alors $d^0\psi_2 = d^0\psi_3$ et $d^0\psi_1 + d^0\psi_2 + d^0\psi_3 \leqslant 2d^0\psi_3$ et, donc, $\psi_1 = c \in R$. Par une procédure de descente analogue à celle de la démonstration du théorème II.4, par composition par divers Φ_τ on peut faire décroître $\deg\psi$ tant que l'une de ses composantes n'est pas constante.

THÉORÈME 5. *Pour* $\sigma \in \operatorname{Hom}(F, F)$, $Q_\sigma \equiv 0$ *si et seulement si* σ *n'est pas injectif.*

Démonstration. Supposons σ non injectif. En vertu de la proposition 3, il existe $\mu \in \operatorname{Aut} F$ tel que $\sigma\mu(b) = e$. Or, on sait que $Q_{\sigma\mu} = Q_\mu Q_\sigma \circ \Phi_\mu$. Or, il est facile de vérifier que $Q_{\sigma\mu} = 0$. Comme $Q_\mu \equiv 1$, cela implique $Q_\sigma \equiv 0$.

Supposons maintenant que l'on ait $Q_\sigma \equiv 0$. En vertu du lemme précédent, il existe $\tau \in \operatorname{Aut} F$ tel que la première composante de $\Phi_{\tau\sigma}$ soit constante. Le lemme II.2 montre alors que $\tau\sigma(a) = e$, ce qui prouve que σ n'est pas injective.

V. AUTRES PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES Q_σ

THÉORÈME 1. *Pour tout* $\sigma \in \operatorname{End} F$, *on a les faits suivants:*

1°) $Q_\sigma(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\det\sigma)^2$ *pour tous* $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$.

2°) λ *divise le polynôme* $\det\Phi'_\sigma - (\det\sigma)Q_\sigma$.

Démonstration. Observons d'abord que si p et q sont deux entiers rationnels on a

$$P_{a^p b^q}(x, y, z) = zu_p(x)u_q(y) - xu_p(x)u_{q-1}(y) - yu_{p-1}(x)u_q(y) + 2u_{p-1}(x)u_{q-1}(y).$$

Si ε et η valent ± 1, il est facile de vérifier que

$$P_{a^p b^q}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = 2\varepsilon^p\eta^q$$

et de calculer le gradient de $P_{a^p b^q}$:

$$P'_{a^p b^q}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\varepsilon p(p-q), \eta q(q-p), \varepsilon\eta pq)\varepsilon^p\eta^q.$$

Considérons maintenant un élément de σ de $\operatorname{End} F$ dont la matrice est $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Ce qui précède montre que le point $(2, 2, 2)$ est point fixe pour Φ_σ et que l'ensemble $\{(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta); \varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}\}$ est globalement invariant par Φ_σ.