

## II. DÉTERMINATION DU NOYAU DE

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

PROPOSITION 10. Si  $\sigma \in \text{Aut}(F)$ , alors  $\det \Phi'_\sigma = \pm 1$ .

*Démonstration.* Différentions la relation  $\Phi_{\sigma^{-1}} \circ \Phi_\sigma = \text{id}$  et prenons les déterminants. On obtient

$$\det(\Phi'_{\sigma^{-1}} \circ \Phi'_\sigma) \det(\Phi'_\sigma) = 1 .$$

Comme ces déterminants sont des polynômes à coefficients entiers, ils sont nécessairement constants, égaux à  $\pm 1$ .

LEMME 11. Pour tout  $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$ , on a  $Q_\sigma(0, 0, 0) = 0$  ou  $1$ .

*Démonstration.* Il suffit de considérer  $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$  tel que  $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ .

Nous donnerons plus loin un résultat plus précis que celui-ci.

PROPOSITION 12. Si  $\sigma \in \text{Aut } F$ , on a  $Q_\sigma = 1$ .

*Démonstration.* Ceci résulte de la proposition 8 et du lemme 11.

## II. DÉTERMINATION DU NOYAU DE $\Phi$

Comme l'ont observé Kolar et Ali [3], les polynômes de Chebyshev interviennent naturellement dans ce contexte.

Considérons les deux suites de polynômes  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  satisfaisant la même relation de récurrence

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = xt_n(x)$$

$$u_{n+1}(x) + u_{n-1}(x) = xu_n(x)$$

avec les conditions initiales

$$t_0(x) = 2, \quad t_1(x) = x, \quad u_0(x) = 0, \quad u_1(x) = 1 .$$

Il est facile de vérifier les faits suivants:

$$t_{-n} = t_n, \quad d^0 t_n = |n|$$

$$u_{-n} = -u_n, \quad d^0 u_n = n - 1 \quad \text{si } n \geq 1$$

$$t_n(2 \cos \varphi) = 2 \cos n\varphi$$

$$u_n(2 \cos \varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$

$$t_n(x) = xu_n(x) - 2u_{n-1}(x) .$$

L'intérêt pour nous de ces polynômes vient du lemme suivant dont la démonstration par récurrence est immédiate.

LEMME 1. Si  $A$  est une matrice carrée telle que  $A^2 = xA - 1$ , alors, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on a

$$A^n = u_n(x)A - u_{n-1}(x)$$

et, si  $A$  est une matrice  $2 \times 2$ ,  $\text{tr } A^n = t_n(x)$ .

LEMME 2. Soit  $w = a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2} \cdots a^{m_k}b^{n_k}$  un élément de  $F$ . On suppose que, si  $k > 0$ , on a  $m_1m_2 \cdots m_k n_1 \cdots n_k \neq 0$ , (si  $k = 0$ , par convention  $w = e$ ). Alors  $d_z^0 P_w = k$ , (où  $d_z^0$  désigne le degré par rapport à la variable  $z$ ).

*Démonstration.* Elle se fait par récurrence sur  $k$ . Le lemme est vrai pour  $k = 0$ . Supposons-le vrai pour  $k \leq l - 1$ .

Soit  $w = a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2} \cdots a^{m_l}b^{n_l} = w_1 a^{m_l} b^{n_l}$ . On a, si  $T\varphi = (x, y, z)$ ,

$$\varphi(w) = \varphi(w_1) [u_{m_l}(x)\varphi(a) - u_{m_l-1}(x)] [u_{n_l}(y)\varphi(b) - u_{n_l-1}(y)].$$

La trace de  $\varphi(w)$  est donc combinaison linéaire à coefficients polynômiaux en  $x$  et  $y$  des traces de  $\varphi(w_1 ab)$ ,  $\varphi(w_1 a)$ ,  $\varphi(w_1 b)$  et  $\varphi(w_1)$ . Puisque, pour calculer des traces de produits, on peut opérer des permutations circulaires, l'hypothèse de récurrence montre que les traces de  $\varphi(w_1 a)$ ,  $\varphi(w_1 b)$  et  $\varphi(w_1)$  ont un degré en  $z$  inférieur ou égal à  $l - 1$ .

Ainsi donc le degré en  $z$  du polynôme

$$\text{tr } \varphi(w) - \text{tr}(\varphi(w_1 ab)) u_{m_l}(x) u_{n_l}(y)$$

est strictement inférieur à  $l$ .

Répétant le même argument aux autres facteurs de  $w$ , on obtient que le degré en  $z$  du polynôme

$$\text{tr } \varphi(w) - \text{tr}(\varphi[(ab)^l]) \prod_{j=1}^l [u_{m_j}(x) u_{n_j}(y)]$$

est au plus  $l - 1$ .

Mais  $\text{tr } \varphi(ab)^l = t_l(z)$  est un polynôme en  $z$  de degré  $l$ . Ceci achève la démonstration.

LEMME 3. Si  $w \in F$  est tel que  $P_w = \alpha z$  ( $\alpha \in \mathbf{Z}$ ), alors  $\alpha = 1$  et l'on a  $w = uabu^{-1}$  ou  $w = ua^{-1}b^{-1}u^{-1}$  pour un  $u \in F$ .

*Démonstration.* Si  $\alpha = 0$ , le lemme précédent montre que la réduction cyclique de  $w$  est  $e$ ,  $a^m$  ou  $b^n$ . Dans aucun de ces cas on obtient  $P_w = 0$ . Donc  $\alpha \neq 0$ .

Le lemme précédent montre alors que la réduction cyclique de  $w$  est  $a^m b^n$  (avec  $mn \neq 0$ ). Alors le lemme 1 montre que l'on a

$$P_w(x, y, z) = u_m(x)u_n(y)z - yu_{m-1}(x)u_n(y) - xu_m(x)u_{n-1}(y) + 2u_{m-1}(x)u_{n-1}(y).$$

Or  $u_m(x)u_n(y) = \alpha$  implique  $|m| = |n| = 1$  et  $\alpha = mn$ . Si  $mn = -1$ , alors l'un des deux termes  $yu_{m-1}(x)u_n(y)$  ou  $xu_m(x)u_{n-1}(y)$  reste seul, ce qui est impossible. Donc  $m = n = \pm 1$ , d'où le lemme.

LEMME 4. Soit  $w \in F$ . Alors

1°) Si  $P_w = \alpha x$ , on a  $\alpha = 1$  et  $w = uau^{-1}$  ou  $w = ua^{-1}u^{-1}$ .

2°) Si  $P_w = \alpha y$ , on a  $\alpha = 1$  et  $w = ubu^{-1}$  ou  $w = ub^{-1}u^{-1}$ .

*Démonstration.* Supposons que l'on ait  $P_w = \alpha x$ . Considérons l'élément  $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$  ainsi défini:  $\sigma(a) = ab$ ,  $\sigma(b) = b^{-1}$ . On a  $\Phi_\sigma(x, y, z) = (z, y, x)$ , donc, en vertu de la proposition I.3, on a  $P_{\sigma(w)}(x, y, z) = P_w \circ \Phi_\sigma(x, y, z) = \alpha z$ . On en déduit (lemme précédent) que  $\alpha = 1$  et que  $\sigma(w) = uabu^{-1}$  ou  $\sigma(w) = ua^{-1}b^{-1}u^{-1}$ . Mais  $\sigma$  est un isomorphisme:  $\sigma^{-1}(a) = ab$ ,  $\sigma^{-1}(b) = b^{-1}$ . On a donc  $w = \sigma^{-1}(u)a\sigma^{-1}(u^{-1})$  ou  $w = \sigma^{-1}(u)b^{-1}a^{-1}b\sigma^{-1}(u^{-1})$ .

Pour démontrer la seconde assertion, on utilise de la même façon l'isomorphisme  $(a^{-1}, ab)$ .

THÉORÈME 5. Pour  $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$  les propriétés suivantes sont équivalentes:

1°)  $\Phi_\sigma = \text{id}$

2°)  $\sigma$  est soit un automorphisme intérieur, soit un automorphisme intérieur composé avec l'involution  $(a^{-1}, b^{-1})$ .

*Démonstration.* Il est clair que la seconde propriété implique la première. Supposons que l'on ait  $\Phi_\sigma = \text{id}$ . Il résulte du lemme précédent que l'on a

$$\sigma(a) = ua^\varepsilon u^{-1} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1 \quad \text{et} \quad u \in F$$

et

$$\sigma(b) = vb^\eta v^{-1} \quad \text{avec} \quad \eta = \pm 1 \quad \text{et} \quad v \in F.$$

On sait par ailleurs (proposition I.9) que  $\lambda$  divise  $P_{\sigma(ab)} - P_{a^\varepsilon b^\eta}$ . Comme  $P_{\sigma(ab)} = z$  et  $P_{a^{-1}b} = P_{ab^{-1}} = xy - z$  on a  $\varepsilon = \eta$ . Quitte à composer avec l'involution  $(a^{-1}, b^{-1})$ , on peut supposer que l'on a  $\varepsilon = \eta = 1$ .

Supposons que les mots  $uau^{-1}$  et  $\nu b\nu^{-1}$  soient réduits. Si  $u = \nu = e$ , il n'y a rien à démontrer. Sinon, supposons que  $|u| \geq |\nu|$  (où  $|u|$  désigne la longueur de  $u$ ). On a alors  $u = u'b^n$  avec  $n \neq 0$ , la dernière lettre de  $u'$  étant  $a$ , si  $|u'| > 0$ . Dans ces conditions on a

$$\sigma(ab) = u'b^n ab^{-n} u'^{-1} \nu b \nu^{-1}$$

d'où

$$z = P_{(ab^{-n} u'^{-1} \nu b \nu^{-1} u' b^n)}.$$

Utilisant une nouvelle fois le lemme 3, on obtient que  $u'^{-1} \nu = b^k$ . L'irréductibilité de  $\nu b \nu^{-1}$  implique alors  $u' = \nu$ . Ceci montre que  $\sigma$  est un automorphisme intérieur.

### III. APPLICATIONS POLYNOMIALES LAISSANT $\lambda$ INVARIANT

#### CARACTÉRISATION DES $\sigma$ TELS QUE $Q_\sigma = 1$

On désigne par  $R$  un domaine d'intégrité de caractéristique nulle et par  $\mathcal{A}$  l'ensemble des  $\psi \in (R[x, y, z])^3$  tels que  $\lambda \circ \psi = \lambda$ .

L'ensemble  $\mathcal{A}$  contient  $\{\Phi_\sigma; \sigma \in \text{aut } F\}$ . Il sera commode de considérer les éléments suivants de  $\text{aut } F$ :

$$\alpha = (b, a), \quad \beta = (a, b^{-1}), \quad \gamma = (ab, b^{-1}).$$

Les  $\Phi$  correspondants sont

$$\Phi_\alpha(x, y, z) = (y, x, z)$$

$$\Phi_\beta(x, y, z) = (x, y, xy - z)$$

$$\Phi_\gamma(x, y, z) = (z, y, x).$$

On considérera aussi les applications polynomiales suivantes:

$$\rho(x, y, z) = (-x, -y, z)$$

et

$$\theta(x, y, z) = (-x, y, -z).$$

Ces applications polynomiales sont également dans  $\mathcal{A}$ .

Nous allons montrer que  $\mathcal{A}$  est engendré par  $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma, \rho$  et  $\theta$ .