§3

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

b) On suppose que K est un anneau de Dedekind. Montrer que tout comodule E de type fini est quotient d'un comodule F qui est projectif de type fini. (Utiliser a) en prenant pour V un module libre de sorte que F soit sans torsion.)

§2

1) Soit $x \in C$ tel que $d_E(x) = x \otimes x$ et $e(x) = 1$. On note K_x le module K muni de la structure de comodule définie par

$$y \mapsto x \otimes y .$$

Prouver l'équivalence des propriétés suivantes:

a) K_x est le seul objet simple de Com^f_C (à isomorphisme près).

b) Toute sous-cogèbre de C non réduite à 0 contient x.

c) Le comodule C est extension essentielle du sous-comodule Kx (i.e. tout sous-comodule de C différent de 0 contient x).

d) L'algèbre profinie A duale de C est un anneau local d'idéal maximal le noyau de l'homomorphisme $a \mapsto \langle x, a \rangle$ de A dans K.

[Noter que c) signifie ceci: le comodule C est *l'enveloppe injective* du comodule simple Kx.]

§3

1) Avec les notations du n° 3.4, montrer sans utiliser la prop. 4 que la formule (iii) est conséquence des formules (i) et (ii).

2) Les notations étant celles du n° 3.4, on suppose K parfait. Soit g un automorphisme du foncteur υ. Pour tout objet E de Com^f_C, soit s_E (resp. u_E) la composante semi-simple (resp. unipotente) de $g(E)$. Montrer que $E \mapsto s_E$ et $E \mapsto u_E$ sont des automorphismes du foncteur υ. Si g vérifie les relations (i) et (ii), montrer qu'il en est de même pour s et u. Déduire de là la décomposition des éléments de $G(K)$ en produits d'éléments semi-simples et unipotents commutant entre eux (dans le cas où G est un schéma en groupes).

Utiliser le même procédé pour obtenir la décomposition des éléments de l'algèbre de Lie de G en sommes d'éléments semi-simples et nilpotents commutant entre eux.

[Cette décomposition n'a en fait rien à voir avec les bigèbres. On aurait pu la donner au §2.]

3) On suppose que $G = \mathrm{Spec}(C)$ est un schéma en groupes. Prouver l'équivalence des propriétés suivantes:

a) Tout G-module simple est isomorphe au G-module trival K.

b) G est limite projective de groupes algébriques linéaires unipotents.

c) Si $E \in \mathrm{Com}^f_C$, $K_1 \in \mathrm{Alg}_K$, et $u \in G_E(K_1)$, l'élément u est unipotent.

4) On suppose K de caractéristique zéro. Montrer que la catégorie des G-modules semi-simples vérifie les conditions du corollaire à la prop. 3, donc correspond à un quotient H de G. Montrer que l'on peut caractériser H comme le plus grand quotient de G qui soit *réductif* (i.e. limite projective de groupes algébriques linéaires réductifs, au sens usuel).

§4

1) On prend $K = \mathbf{C}$. Le groupe additif $\Gamma = \mathbf{C}$ est considéré comme un groupe de Lie complexe. Soit G son enveloppe, et soit C la bigèbre correspondante.

a) Montrer qu'une fonction $f(z)$ sur Γ appartient à C si et seulement si c'est une *exponentielle-polynôme,* i.e. si elle est combinaison linéaire de fonctions de la forme $z^n e^{\lambda z}$, avec $n \in \mathbf{N}$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

b) Montrer que C est produit tensoriel de la bigèbre formée des polynômes, et de la bigèbre formée des combinaisons linéaires d'exponentielles. Interpréter cette décomposition comme une décomposition de l'enveloppe G en produit du groupe *additif* $\mathbf{G}_a$ et d'un *groupe de type multiplicatif* M dual du groupe abélien $\mathbf{C}$. En particulier, G n'est pas algébrique.

2) Comment faut-il modifier l'exercice précédent lorsque $K = \mathbf{R}$ et $\Gamma = \mathbf{R}$? (La partie «tore» de G n'est plus déployée; son dual est $\mathbf{C}$, *muni* de la conjugaison complexe.)

(Dans les deux exercices ci-après, on se permet d'identifier un groupe profini Γ à son enveloppe relativement à la catégorie des Γ-modules à noyau