

3.5. Interprétation de G comme limite projective de groupes ALGÈBRIQUES LINÉAIRES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Soit d'autre part $d' : C \otimes C \rightarrow C \otimes C \otimes C$ le coproduit du comodule $C \otimes C$. On vérifie sans difficulté que l'on a

$$d'(a \otimes b) = \sum_{i,j} a_i b_j \otimes x_i \otimes x_j,$$

d'où

$$(**) \quad \varphi_u(C \otimes C)(a \otimes b) = \sum_{i,j} u(a_i b_j) \otimes x_i \otimes x_j.$$

En comparant (*) et (**), on voit que $\varphi_u(C \otimes C) = \varphi_u(C) \otimes \varphi_u(C)$ si u est un homomorphisme d'algèbres. Pour prouver la réciproque, choisissons pour $(x_i)_{i \in I}$ une base telle que $x_0 = 1$ pour un élément $0 \in I$ et $e(x_i) = 0$ pour $i \neq 0$. On a alors $a_0 = a$ et $b_0 = b$, et l'égalité de (*) et (**) entraîne $u(a)u(b) = u(ab)$, ce qui achève la démonstration.

La prop. 4 est une conséquence immédiate des deux lemmes ci-dessus. En effet, un élément de $G(K_1)$ est *par définition* un homomorphisme d'algèbres $u : C \rightarrow K_1$ tel que $u(1) = 1$. La seule chose à vérifier, c'est que, pour tout comodule E , l'endomorphisme $u(E)$ de $K_1 \otimes E$ défini par u est égal à $\varphi_u(E)$: or c'est justement la définition de $u(E)$, cf. démonstration de la prop. 1.

Exemple. Prenons pour K_1 l'algèbre des *nombre duals* sur K . La prop. 4 fournit alors un anti-isomorphisme de l'algèbre de Lie de G sur la sous-algèbre de Lie de $\text{End}(v)$ formée des endomorphismes θ de v tels que

$$\theta(K) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(E_1 \otimes E_2) = \theta(E_1) \otimes 1_{E_2} + 1_{E_1} \otimes \theta(E_2).$$

3.5. INTERPRÉTATION DE G COMME LIMITE PROJECTIVE DE GROUPES ALGÈBRIQUES LINÉAIRES

DÉFINITION 2. On dit que C est de type fini (ou que G est algébrique linéaire) si C est de type fini comme algèbre sur K .

PROPOSITION 5. Soit C une bigèbre (resp. une bigèbre possédant une inversion i). Alors C est limite inductive filtrante de ses sous-bigèbres de type fini contenant 1 (resp. et stables par i).

L'énoncé contenant les «resp.» équivaut à:

COROLLAIRE. Le schéma en groupes G associé à C est limite projective filtrante de groupes algébriques linéaires.

On va prouver un résultat plus précis. Soit E un C -comodule (à droite, pour changer un peu) de rang fini et soit C_E la sous-cogèbre de C correspondante.

Pour tout $n \geq 0$, soit $C_E(n)$ la sous-cogèbre attachée au comodule $\bigotimes^n E$; pour $n = 0$, on convient comme d'ordinaire que $\bigotimes^n E = K$, de sorte que $C_E(0) = K$. 1. On sait (cf. lemme 1) que

$$C_E(n) = C_E \dots C_E \quad (n \text{ facteurs}) .$$

Il en résulte que

$$C(E) = \sum_{n=0}^{\infty} C_E(n)$$

est la sous-algèbre de C engendrée par C_E et 1. D'où:

PROPOSITION 6. *L'algèbre $C(E)$ est une sous-bigèbre de C contenant 1 et de type fini; c'est la plus petite sous-bigèbre de C contenant 1 et C_E .*

Comme C est visiblement limite inductive des $C(E)$, cela démontre la première partie de la prop. 5. D'autre part, lorsque C possède une inversion i , la seconde partie de la prop. 5 résulte de la proposition plus précise (mais évidente) suivante:

PROPOSITION 7. *L'algèbre $C(E \oplus \check{E})$ est une sous-bigèbre de C contenant 1 et stable par i ; c'est la plus petite sous-bigèbre de C ayant ces propriétés; elle est de type fini.*

Si l'on note X_E (resp. G_E) le monoïde (resp. groupe) algébrique linéaire associé à $C(E)$ (resp. à $C(E \oplus \check{E})$), on voit que l'on a

$$G = \varprojlim X_E \quad (\text{resp. } G = \varprojlim G_E) .$$

Remarques

1) La construction de $C(E \oplus \check{E})$ à partir de $C(E)$ peut aussi se faire de la manière suivante: au G -module E est associé un élément «déterminant» δ_E , qui est un élément inversible de C , contenu dans $C(E)$. On a:

$$C(E \oplus \check{E}) = C(E) \left[\frac{1}{\delta_E} \right] .$$

2) L'interprétation de X_E et G_E en termes de schémas est la suivante: X_E (resp. G_E) est le plus petit sous-schéma fermé du schéma End_E (resp. GL_E) des endomorphismes (resp. automorphismes) de E contenant l'image de la représentation $\rho: G \rightarrow \text{End}_E$ attachée à E . Cela se vérifie immédiatement sur la construction de l'algèbre affine de End_E (resp. G_E), construction que le rédacteur trouve inutile de reproduire.

DÉFINITION 3. Soit C une bigèbre possédant une inversion. Un C -comodule E de rang fini est dit fidèle si $C(E \oplus \check{E}) = C$.

Vu ce qui précède, E est fidèle si et seulement si $G \rightarrow G_E$ est un isomorphisme.

PROPOSITION 8. Si E est fidèle, toute représentation linéaire de G est quotient d'une sous-représentation d'une somme directe de représentations $\bigotimes_n (E \oplus \check{E})$.

Cela résulte du lemme 1 du n° 2.4.

COROLLAIRE. Tout G -module simple est quotient de Jordan-Hölder d'un $\bigotimes_n (E \oplus \check{E})$.

Remarques

1) Dans le corollaire ci-dessus, on peut remplacer les puissances tensorielles de $E \oplus \check{E}$ par les représentations $\bigotimes_n E \otimes_m \det(E)^{-1}$, avec des notations évidentes.

2) Il se peut que G_E soit fermé dans End_E (et non pas seulement dans GL_E), autrement dit que $C(E) = C(E \oplus \check{E})$. C'est le cas, par exemple, si G_E est contenu dans SL_E . Dans ce cas, la prop. 8 et son corollaire se simplifient: on peut remplacer les puissances tensorielles de $E \oplus \check{E}$ par celles de E .

§4. ENVELOPPES

4.1. COMPLÉTION D'UNE ALGÈBRE

[Ce sorite pourrait remonter au n° 2.2.]

Soit A une algèbre associative à élément unité. Soit S_d (resp. S_g, S) l'ensemble des idéaux à droite (resp. à gauche, resp. bilatères) de codimension finie dans A . On a $S_d \cap S_g = S$ et S est *cofinal* à la fois dans S_d et dans S_g ; en effet, si $\alpha \in S_g$ par exemple, l'annulateur du A -module A/α appartient à S et est contenu dans α .

On posera:

$$\hat{A} = \varprojlim A/\alpha$$

la limite projective étant prise sur l'ensemble ordonné filtrant S . L'algèbre $\hat{A}$ est l'*algèbre profinie complétée* de A , pour la topologie définie par S (ou S_d , ou S_g , cela revient au même). Il y a un isomorphisme évident de la catégorie