6. Cohomologie et homologie d'une algèbre de Leibniz (cf. [L1], [C], [L-P])

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

enveloppante (au sens Lie) de $\mathscr{L}(V)_{\mathrm{Lie}} = k \, . \, x$ est l'algèbre de polynômes $k[x]$.

L'algèbre enveloppante (au sens Leibniz) de $\mathscr{L}(V)$ est isomorphe à l'algèbre quotient de polynômes non commutatifs $k\langle x, y\rangle / \{xy = 0\}$. (Poser $r_x + l_x = x$, $l_x = -y$). Les applications d_0, d_1 et s_0 sont données par

$$\begin{cases} d_0(x) = x \\ d_0(y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1(x) = 0 \\ d_1(y) = x \end{cases}$$

et $s_0(x) = x + y$.

5.5. *Poincaré-Birkhoff-Witt.* On peut faire un traitement de UL en tous points analogue à celui de U: filtration, théorème de *PBW,* algèbre enveloppante d'un produit, etc. (*cf.* [L-P] pour *PBW*).

6. Cohomologie et homologie d'une algèbre de Leibniz (*cf.* [L1], [C], [L-P])

Historiquement la notion d'algèbre de Leibniz est apparue de la façon suivante. On sait que le calcul de l'homologie (à coefficients triviaux) d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut se faire à partir d'un complexe (de Chevalley-Eilenberg) dont l'espace des n-chaînes est $\Lambda^n \mathfrak{g}$ (produit extérieur n fois). J'ai montré, premièrement, que l'on pouvait relever l'opérateur bord $d\colon \Lambda^n \mathfrak{g} \to \Lambda^{n-1}\mathfrak{g}$ en un opérateur bord $\tilde{d}\colon \mathfrak{g}^{\otimes n} \to \mathfrak{g}^{\otimes n-1}$, et, deuxièmement, que la démonstration de $\tilde{d}^2 = 0$ n'utilise que l'identité de Leibniz du crochet. Moralité: le nouveau complexe est encore bien défini pour n'importe quelle algèbre de Leibniz.

En fait on va voir que l'on peut définir plus généralement des groupes d'homologie d'une algèbre de Leibniz à coefficients dans une coreprésentation et des groupes de cohomologie à valeurs dans une représentation. Ces groupes peuvent s'interpréter en termes de foncteurs dérivés (Tor et Ext respectivement) grâce à l'algèbre enveloppante $UL(\mathfrak{g})$.

6.1. *Cohomologie d'une algèbre de Leibniz.* Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz et M une représentation de $\mathfrak{g}$. Le n-ième module des cochaînes de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M est

$$C^n(\mathfrak{g}, M) := \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\otimes n}, M), n \geqslant 0 \, .$$

On définit un opérateur $d\colon C^n(\mathfrak{g}, M) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, M)$ par

$$(df)(x_1, \ldots, x_{n+1}) := [x_1, f(x_2, \ldots, x_{n+1})]$$
$$+ \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i [f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}), x_i]$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{j+1} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, [x_i, x_j], x_{i+1}, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n).$$

On vérifie que $d \circ d = 0$ grâce aux propriétés des crochets. On a donc un complexe $(C^*(\mathfrak{g}, M), d)$ dont les groupes d'homologie sont notés $HL^n(\mathfrak{g}, M)$, $n \geqslant 0$.

En basses dimensions on a les interprétations suivantes. Le groupe $HL^0(\mathfrak{g}, M)$ est le sous-module de M des invariants à gauche, i.e. $\{m \in M \mid [x, m] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}\}$. Le groupe $HL^1(\mathfrak{g}, M)$ s'identifie au module des dérivations de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M, modulo les dérivations intérieures.

Comme on peut s'y attendre le groupe $HL^2(\mathfrak{g}, M)$ s'interprète en termes d'extensions.

6.2. THÉORÈME [L-P]. *Pour toute algèbre de Leibniz* $\mathfrak{g}$ *et toute représentation* M *de* $\mathfrak{g}$ *on note* $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, M)$ *l'ensemble des classes d'isomorphie d'extensions de* $\mathfrak{g}$ *par* M. *On a alors un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, M) \cong HL^2(\mathfrak{g}, M) .$$

Le cas particulier où M est une représentation symétrique est déjà dans [C].

Puisque toute algèbre de Leibniz donne naissance à une extension abélienne de conoyau $\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}$ et de noyau $\mathfrak{g}^{\mathrm{ann}}$, il existe un élément privilégié dans $HL^2(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}, \mathfrak{g}^{\mathrm{ann}})$ que l'on appelle *l'élément caractéristique* de $\mathfrak{g}$.

6.3. *Homologie d'une algèbre de Leibniz.* Pour toute coreprésentation N de $\mathfrak{g}$ on définit le module des n-chaînes de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans N par

$$C_n(\mathfrak{g}, N) = N \otimes \mathfrak{g}^{\otimes n}, \; n \geqslant 0 .$$

On définit un opérateur bord $d \colon C_n(\mathfrak{g}, N) \to C_{n-1}(\mathfrak{g}, N)$ par la formule

$$d_n(m, x_1, \ldots, x_n) = ([m, x_1], x_2, \ldots, x_n)$$
$$+ \sum_{i=2}^{n} (-1)^i ([x_i, m], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{j+1} (m, x_1, \ldots, x_{i-1}, [x_i, x_j], \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n) .$$

On vérifie que $d \circ d = 0$ grâce aux propriétés des crochets. On a donc un complexe $(C_*(\mathfrak{g}, M), d)$ dont les groupes d'homologie sont notés

$$HL_n(\mathfrak{g}, M),\ n \geqslant 0\ .$$

6.4. THÉORÈME [L-P]. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Leibniz telle que* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}$ *soient libres en tant que k-modules. Alors pour toute représentation* M *de* $\mathfrak{g}$ *et toute corepresentation* N *de* $\mathfrak{g}$ *on a des isomorphismes naturels*

$$HL^*(\mathfrak{g}, M) \cong \mathrm{Ext}^*_{UL(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}), M)\ ,$$
$$HL_*(\mathfrak{g}, N) \cong \mathrm{Tor}^{UL(\mathfrak{g})}_*(U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}), N)\ .$$

Dans ce théorème $U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}})$ est considéré comme un $UL(\mathfrak{g})$-module à droite via l'homomorphisme d_0 décrit après le théorème 5.2. Le principe de la démonstration consiste à construire une résolution libre $W_*(\mathfrak{g})$ du $UL(\mathfrak{g})$-module $U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}})$. La démonstration de l'acyclicité se fait grâce à des formules de Cartan.

6.5. *Homologie à coefficients dans la représentation adjointe.* Lorsque $N = k$ est la représentation triviale, l'opérateur d s'écrit simplement

$$d(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{j+1}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes [x_i, x_j] \otimes \cdots \otimes \hat{x}_j \otimes \cdots \otimes x_n)\ .$$

C'est le complexe défini dans [L1]. Si l'on prend maintenant $N = \mathfrak{g}$, à savoir la représentation adjointe, et que l'on suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, alors la formule de 6.3 nous montre que l'on obtient, à un décalage près, le même complexe que précédemment. On a ainsi un isomorphisme

$$HL_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong HL_{n+1}(\mathfrak{g}, k),\ n \geqslant 0\ .$$

6.6. *Comparaison avec l'homologie d'une algèbre de Lie.* Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et M un $\mathfrak{g}$-module. Lorsque $\mathfrak{g}$ est considérée comme une algèbre de Leibniz, M peut être considéré à la fois comme une représentation et comme une corepresentation. Par passage au quotient on définit un morphisme

$$C_n(\mathfrak{g}, M) = M \otimes \mathfrak{g}^{\otimes n} \to M \otimes \Lambda^n \mathfrak{g}$$

qui commute aux opérateurs bords. En effet classiquement (*cf.* par exemple [K1]) l'opérateur bord du complexe donnant l'homologie d'une algèbre de Lie à coefficients dans un module est

$$d(m \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum (-1)^{i-1}[m, x_i] \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{i+j} m \otimes [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n \,.$$

On en déduit un homomorphisme naturel

$$HL_n(\mathfrak{g}, M) \to H_n(\mathfrak{g}, M) \,.$$

De même, en cohomologie on a un homomorphisme naturel

$$H^n(\mathfrak{g}, M) \to HL^n(\mathfrak{g}, M) \,.$$

6.7. *Homologie d'une somme d'algèbres de Leibniz.* Dans cette sous-section on prend des coefficients triviaux et on note $HL_n(\mathfrak{g})$ au lieu de $HL_n(\mathfrak{g}, k)$. De plus on suppose que k est un corps.

On sait que pour des algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ sur k, l'homologie de la somme directe $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ est donnée par la formule de Künneth (isomorphisme d'espaces vectoriels gradués)

$$H_*(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}') \cong H_*(\mathfrak{g}) \otimes H_*(\mathfrak{g}') \,.$$

Pour exprimer le résultat pour HL on a besoin de la construction suivante. Le *coproduit,* dans la catégorie de k-algèbres associatives et unitaires, de R et R' est noté $R * R'$. Soit M (resp. N) un k-module $\mathbf{N}$-gradué tel que $M_0 = k$ (resp. $N_0 = k$). On peut le considérer comme une algèbre associative et unitaire en munissant l'idéal d'augmentation $\oplus_{i>0} M_i$ (resp. $\oplus_{i>0} N_i$) du produit nul. L'unité de $k = M_0$ (resp. N_0) est l'unité de cette algèbre. Il est clair que $M * N,$ au sens précédent, est aussi une algèbre $\mathbf{N}$-graduée augmentée. On note $(M * N)_n$ la composante de degré n. On constate que

$$(M * N)_0 = M_0 \otimes N_0 \cong k,$$
$$(M * N)_1 = M_1 \oplus N_1,$$
$$(M * N)_2 = M_2 \oplus (M_1 \otimes N_1) \oplus (N_1 \otimes M_1) \oplus M_2 \,,$$

plus généralement $(M * N)_n$ s'exprime comme la somme des 2^n composantes du type $X_{i_1} \otimes Y_{i_2} \otimes X_{i_3} \otimes Y_{i_4} \otimes \cdots$ où $X = M$ et $Y = N,$ ou $X = N$ et $Y = M,$ et $\Sigma_j i_j = n, i_j \geqslant 1$.

On remarque que si $M = T(V)$ et $N = T(W)$, où V et W sont deux e.v. sur $k,$ on a alors

$$M * N = T(V) * T(W) \cong T(V \oplus W) \,.$$

6.8. THÉORÈME [L2]. *Soit* k *un corps,* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{g}'$ *deux algèbres de Leibniz sur* k. *On a alors un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués*

$$HL_*(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}') \cong HL_*(\mathfrak{g}) * HL_*(\mathfrak{g}') .$$

La démonstration de ce théorème utilise une variante algébrique de l'intégrale itérée de Chen.

6.9. *Structure de comonoïde.* L'homologie classique d'une algèbre de Lie admet une structure de cogèbre induite par la diagonale. Dans le cas des algèbres de Leibniz $HL_*(\mathfrak{g})$ admet une structure de *comonoïde,* i.e. la diagonale induit un homomorphisme

$$\Delta_* : HL_*(\mathfrak{g}) \to HL_*(\mathfrak{g}) * HL_*(\mathfrak{g})$$

qui est coassociatif. L'existence de Δ_* résulte du théorème précédent.

6.10. *Théorie de la déformation.* A toute catégorie «algébrique», par exemple les algèbres associatives, les algèbres associatives et commutatives, les algèbres de Lie, est associée une théorie de la déformation, qui est contrôlée par une certaine théorie cohomologique. Dans les exemples ci-dessus on trouve, en caractéristique zéro, la cohomologie de Hochschild, la cohomologie de Harrison, (= André-Quillen) et la théorie de cohomologie classique des algèbres de Lie (Chevalley-Eilenberg-Koszul) respectivement. On peut montrer que pour les algèbres de Leibniz cette théorie cohomologique est précisément HL^* (*cf.* [R]).

7. CALCULS DE GROUPES D'HOMOLOGIE *HL*

On a déjà remarqué (*cf.* 6.5) que l'homologie à coefficients dans la représentation adjointe est, à un décalage près, l'homologie à coefficients triviaux.

Dans la suite on ne s'intéresse qu'aux coefficients triviaux et on note $HL_n(\mathfrak{g})$ au lieu de $HL_n(\mathfrak{g}, k)$.

7.1. *Algèbre de Leibniz abélienne.* Il est clair d'après la définition de l'homologie, que si $\mathfrak{g}$ est abélienne, alors $HL_n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{\otimes n}$, $n \geqslant 0$. L'homomorphisme de comparaison avec l'homologie classique est donc simplement le passage au quotient $\mathfrak{g}^{\otimes n} \to \Lambda^n \mathfrak{g}$. Ainsi les théories *HL* et *H* sur les algèbres de Lie sont-elles distinctes dès que $n \geqslant 2$.