4. Extensions abéliennes d'algèbres de Leibniz et représentations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

3. Dérivations et bidérivations

3.1. *Définitions.* Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz. Une *dérivation* $d\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une application k-linéaire qui vérifie

$$d([x, y]) = [dx, y] + [x, dy], \quad \text{pour tout} \quad x, y \in \mathfrak{g} .$$

Une *anti-dérivation* $D\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une application k-linéaire qui vérifie

$$D([x, y]) = [Dx, y] - [Dy, x] \quad \text{pour tout} \quad x, y \in \mathfrak{g} .$$

Notons que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie il n'y a pas de différence entre dérivation et anti-dérivation.

Par définition, une *bidérivation* de $\mathfrak{g}$ est la donnée d'une dérivation d et d'une anti-dérivation D qui vérifient en outre

(3.1.1) $$[x, dy] = [x, Dy], \quad \text{pour tout} \quad x, y \in \mathfrak{g} .$$

3.2. *Bidérivation intérieure.* Pour tout $x \in \mathfrak{g}$ l'application $\mathrm{ad}(x)$ définie par $\mathrm{ad}(x)(y) = -[y, x]$ est une dérivation et l'application $\mathrm{Ad}(x)$ définie par $\mathrm{Ad}(x)(y) = [x, y]$ est une anti-dérivation. De plus, $(\mathrm{ad}(x), \mathrm{Ad}(x))$ est une bidérivation (*cf.* 1.1) appelée la *bidérivation intérieure* associée à x.

3.3. *L'algèbre de Leibniz Bider* ($\mathfrak{g}$). L'ensemble des bidérivations de $\mathfrak{g}$ forme un k-module que l'on munit d'un crochet en posant

$$[(d, D), (d', D')] = (dd' - d'd, Dd' - d'D) .$$

On peut montrer que, non seulement le membre de droite est bien une bidérivation, mais de plus ce crochet vérifie la relation (L). On a ainsi construit l'algèbre de Leibniz des bidérivations de $\mathfrak{g}$, que l'on note Bider ($\mathfrak{g}$). On vérifie aisément que

$$\mathfrak{g} \to \mathrm{Bider}(\mathfrak{g}), \quad x \mapsto (\mathrm{ad}\, x, \mathrm{Ad}\, x)$$

est un morphisme d'algèbres de Leibniz.

4. Extensions abéliennes d'algèbres de Leibniz et représentations

Une *algèbre de Leibniz abélienne* est tout simplement une algèbre de Lie abélienne (i.e. $[x, y] = 0$). Par définition une *extension abélienne* d'algèbres de Leibniz est une suite d'algèbres de Leibniz

$$0 \to M \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to 0$$

qui est exacte et scindée en tant que suite de k-modules et dans laquelle M est une algèbre de Leibniz abélienne.

Cette suite exacte permet de définir deux actions de $\mathfrak{g}$ sur M:

$$[-,-]: \mathfrak{g} \times M \to M, [g, m] := [\tilde{g}, m] ,$$
$$[-,-]: M \times \mathfrak{g} \to M, [m, g] := [m, \tilde{g}] .$$

Dans ces deux formules $\tilde{g}$ est un relèvement de $g \in \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$ et le crochet de droite est celui de $\mathfrak{h}$. La notation ne prête pas à confusion lorsqu'on sait dans quelle algèbre se trouvent les variables.

La relation (L) du crochet de $\mathfrak{h}$ implique que ces deux actions et le crochet de $\mathfrak{g}$ sont reliés par les relations

$$(MLL) \qquad [m, [x, y]] = [[m, x], y] - [[m, y], x]$$
$$(LML) \qquad [x, [m, y]] = [[x, m], y] - [[x, y], m]$$
$$(LLM) \qquad [x, [y, m]] = [[x, y], m] - [[x, m], y]$$

pour tout $m \in M$ et tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

4.1. *Définition.* Pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$, une *représentation* de $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un k-module M et de deux applications bilinéaires $[-,-]: \mathfrak{g} \times M \to M$ et $[-,-]: M \times \mathfrak{g} \to M$ vérifiant les axiomes (MLL), (LML) et (LLM).

Remarquons que le premier axiome ne fait intervenir que l'action à droite de $\mathfrak{g}$ sur M. Notons aussi que les deux derniers impliquent la relation

$$(ZD) \qquad [x, [y, m]] + [x, [m, y]] = 0 .$$

4.2. *Représentation adjointe.* Il est clair que si l'on prend $M = \mathfrak{g}$ et que l'on prend pour chacune des actions de $\mathfrak{g}$ le crochet de $\mathfrak{g}$, on obtient une représentation appelée la *représentation adjointe.*

4.3. *Symétries.* Une représentation M de $\mathfrak{g}$ est dite *symétrique* si

$$[m, x] + [x, m] = 0 \quad \text{pour tout} \quad m \in M, x \in \mathfrak{g} .$$

Par exemple si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et M une représentation au sens des algèbres de Lie, alors c'est une représentation symétrique au sens des algèbres de Leibniz.

Une représentation M de $\mathfrak{g}$ est dite *antisymétrique* si

$$[x, m] = 0 \quad \text{pour tout} \quad m \in M, x \in \mathfrak{g} .$$

Il est clair que pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ le noyau $\mathfrak{g}^{\mathrm{ann}}$ (*cf.* 2.1) est une représentation de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}$. C'est une représentation antisymétrique.

Une représentation M de $\mathfrak{g}$ est dite *triviale* si elle est à la fois symétrique et antisymétrique, c'est-à-dire

$$[x, m] = 0 = [m, x] \quad \text{pour tout} \quad m \in M, x \in \mathfrak{g} .$$

4.4. *Coreprésentations.* Dans l'analogie avec les algèbres associatives, les représentations sont l'analogue des modules à droite (voir ci-dessous thm 5.2). La notion duale, c'est-à-dire l'analogue des modules à gauche, est celle de coreprésentation.

Par définition une *coreprésentation* N de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un k-module et de deux actions $[-,-]: \mathfrak{g} \times N \to N$ et $[-,-]: N \times \mathfrak{g} \to N$ vérifiant les axiomes suivants

$$(MLL)' \qquad [[x, y], m] = [x, [y, m]] - [y, [x, m]]$$

$$(LML)' \qquad [[y, [m, x]] = [[y, m], x] - [m, [x, y]]$$

$$(LLM)' \qquad [[m, x], y] = [m, [x, y]] - [[y, m], x] ,$$

pour tout $m \in N$ et tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

Notons que les deux dernières relations impliquent la relation

$$(ZD)' \qquad [y, [m, x]] + [[m, x], y] = 0 .$$

Il est clair que toute représentation d'une algèbre de Lie définit à la fois une représentation et une coreprésentation au sens des algèbres de Leibniz.

Le *produit tensoriel* d'une coreprésentation N et d'une représentation M est le quotient de $N \otimes_k M$ par les relations

$$[n, x] \otimes m \sim n \otimes [x, m] \quad \text{et} \quad [x, n] \otimes m \sim n \otimes [m, x]$$

pour tout $x \in \mathfrak{g}, n \in N$ et $m \in M$.

5. Algèbre enveloppante (*cf.* [L-P]).

La catégorie des représentations d'une algèbre de Leibniz donnée $\mathfrak{g}$ est une catégorie abélienne. Il est naturel d'essayer de la représenter comme une catégorie de modules sur une certaine algèbre, appelée algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.