

## §4. Related problems

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

since it is  $b$ , the smallest of the two integers  $a$  and  $b$  that seems to control the behavior of  $(a/b)^n$ . It is also to be noticed that in Dixon's inequality, the  $\ln a$  that appears on the left hand side could well be replaced by  $\ln b$  since for "almost all" couples  $a, b$ ,  $\ln a \approx \ln b$ .

Numerical evidence supports equality (1). Based on computer computation, Chr. Batut and M. Olivier showed that

$$\left| \frac{1}{n} \delta \left( \left( \frac{a}{b} \right)^n \right) - \frac{12}{\pi^2} \ln 2 \ln b \right|$$

is less than .02 for  $n$  in the range (4000, 5000) and for  $a = 3, b = 2$  on the one hand and  $a = 5, b = 2$  on the other hand.

#### §4. RELATED PROBLEMS

My initial (unsuccessful) attempts to prove Theorem 1 were based on the comparison of  $\delta(ax/b)$  to  $\delta(x)$ . I was hoping that a relationship between both depths would give by induction some results on  $\delta(xa^n/b^n)$ . This turned out nonconclusive, yet I did obtain some results which I believe are interesting in themselves [10].

Let  $a, b, c, d$  be coprime integers and let  $\Delta = |ad - bc|$ . Consider the Möbius map

$$x \mapsto Tx = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

THEOREM 2.

$$\limsup_{\delta(x) \rightarrow \infty} \frac{\delta(Tx)}{\delta(x)} = \Theta(\Delta)$$

where  $\Theta$  takes odd integral values. As  $n$  increases to infinity  $\Theta(n)$  behaves like  $\ln n$ . More precisely let

$$\alpha = \left( 2 \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{-1}.$$

Then for all integer  $n \geq 1$

$$1 + \alpha \ln n \leq \Theta(n) \leq 2(1 + \alpha \ln n).$$

$\Theta$  is linked to the depth by the formula

$$\Theta(n) = \max_{1 \leq b \leq n} \delta \left( \frac{b}{n} \right) + 1.$$

Finally

$$\liminf_{\delta(x) \rightarrow \infty} \frac{\delta(Tx)}{\delta(x)} = \frac{1}{\Theta(\Delta)}.$$

The following table gives the first values of  $\Theta$

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\Theta(n)$	1	3	3	3	5	3	5	5	5	5	...

Actually Theorem 1 can be improved. There exist two constants  $C_1 = C_1(T)$  and  $C_2 = C_2(T)$  such that for all rational  $x$

$$\frac{1}{\Theta(\Delta)} \delta(x) - C_1 \leq \delta(Tx) \leq \Theta(\Delta) \delta(x) + C_2.$$

Both inequalities are sharp apart from the exact values of  $C_1$  and  $C_2$ .

## 5. MORE QUESTIONS

To every Möbius map  $T$  we associate the interval  $I(T) = [\Theta^{-1}(\Delta), \Theta(\Delta)]$ .

PROBLEM 3. *Is it true that for all  $\zeta \in I(T)$  there exists a sequence of rational numbers  $x_n$  such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(x_n) = \infty$  and*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta(Tx_n)}{\delta(x_n)} = \zeta?$$

PROBLEM 4. *Let  $T_1, T_2, \dots, T_k$  be Möbius maps with pairwise coprime determinants  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ .*

*Is it true that for all*

$$(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) \in \prod_{i=1}^k I(T_i)$$

*there exists a sequence of rational  $x_n$  with strictly increasing depths such that for all  $i = 1, 2, \dots, k$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta(T_i x_n)}{\delta(x_n)} = \zeta_i?$$

*Can  $k$  be infinite?*

The following result should be mentioned at this point.