

1. Catégories dérivées

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1990)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CATÉGORIES DÉRIVÉES ET DUALITÉ,

TRAVAUX DE J.-L. VERDIER

par Luc ILLUSIE ¹⁾

Je vais parler des travaux de Verdier en algèbre homologique dans les années soixante, du moins des plus célèbres d'entre eux: sa thèse sur les catégories dérivées, et ses contributions aux théories de dualité.

1. CATÉGORIES DÉRIVÉES

1.1. Les catégories dérivées ont eu d'innombrables applications. D'un maniement réservé, au début, à un petit cercle d'initiés autour de Grothendieck, elles sont devenues aujourd'hui d'un usage courant dans quantité de domaines, bien au-delà de la géométrie algébrique (je pense notamment à l'analyse microlocale). Pour comprendre la révolution qu'a constituée l'introduction des catégories dérivées, il faut se replacer en 1960. A cette époque, l'algèbre homologique est déjà très développée. Cohomologie des faisceaux, foncteurs dérivés, suites spectrales forment une théorie élaborée, pour laquelle on dispose d'excellents traités: le livre de Cartan-Eilenberg [3], celui de Godement [10], et le long mémoire de Grothendieck [13], unifiant et généralisant les constructions de [3] et [10]. Pourtant, Grothendieck se rend compte que ce formalisme est nettement insuffisant pour ce qu'il envisage de faire. Deux ans plus tôt, au Congrès international d'Edimbourg, il avait en effet esquissé [14] un vaste programme de reconstruction de la géométrie algébrique: la théorie des schémas. Dans le cadre de ce programme, il avait annoncé des extensions du théorème de dualité de Serre [28] aux faisceaux cohérents sur des variétés algébriques arbitrairement singulières. Au moment d'entreprendre une rédaction d'ensemble de ses résultats, il s'aperçoit que, ne serait-ce que pour formuler les énoncés qu'il a en tête, il manque des outils

¹⁾ Exposé donné le 19 octobre 1989, lors de la cérémonie en hommage à Jean-Louis Verdier organisée par l'Université de Paris VII.

adéquats. Il conçoit alors une nouvelle théorie des foncteurs dérivés, conduisant à une refonte complète de l'algèbre homologique. Il explique les idées maîtresses de son projet à Verdier, et le lui propose comme sujet de thèse. Verdier met rapidement sur pied les constructions essentielles, et, dans le courant de l'année 1963, rédige un résumé des principaux résultats [V12]. Disposant alors des fondements voulus, Grothendieck expose la théorie de dualité qu'il avait en vue dans un gros manuscrit [15], qui servira de base au séminaire que Hartshorne dirigera à Harvard l'automne de la même année [17]. Le résumé de Verdier [V12] et le premier chapitre de ce séminaire resteront d'ailleurs longtemps les seules références sur la théorie des catégories dérivées.

1.2. L'observation de départ est que les constructions usuelles de l'algèbre homologique fournissent non seulement des groupes de cohomologie, des suites exactes longues, des suites spectrales, mais en général un peu plus: des complexes avec une certaine indétermination. Pour préciser ce point, Grothendieck introduit la notion suivante, fondamentale pour toute la suite: si

$$L = (\dots \rightarrow L^i \rightarrow L^{i+1} \rightarrow \dots), \quad M = (\dots \rightarrow M^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow \dots)$$

sont des complexes d'une catégorie abélienne et $u: L \rightarrow M$ un morphisme de complexes, on dit que u est un *quasi-isomorphisme* si $H^i u: H^i L \rightarrow H^i M$ est un isomorphisme pour tout i . Les complexes obtenus en pratique sont «bien définis à quasi-isomorphisme près».

A titre d'illustration, revenons sur la définition des faisceaux images directes supérieures $R^i f_* E$, où $f: X \rightarrow Y$ est une application continue entre espaces topologiques et E un faisceau abélien sur X . On choisit une résolution

$$0 \rightarrow E \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots \rightarrow I^n \rightarrow \dots$$

(i.e. un quasi-isomorphisme $E \rightarrow I$), où les I^n sont des faisceaux abéliens injectifs, on considère le complexe $f_* I$ déduit de I par application terme à terme du foncteur image directe f_* , et l'on «définit» $R^i f_* E$ comme le i -ème faisceau de cohomologie de $f_* I$,

$$R^i f_* E := \mathcal{L}^i(f_* I).$$

Si $E \rightarrow I'$ est une seconde résolution de E par un complexe à composantes injectives, il existe un morphisme de résolutions $I \rightarrow I'$ (i.e. un morphisme de complexes $I \rightarrow I'$ compatible aux augmentations $E \rightarrow I$, $E \rightarrow I'$), qui est une équivalence d'homotopie; le morphisme $f_* I \rightarrow f_* I'$ qui s'en déduit par application de f_* est encore une équivalence d'homotopie, *a fortiori* un quasi-

isomorphisme: on obtient ainsi un système transitif d'isomorphismes entre les $\mathcal{Z}^i f_* I$, et l'on peut, plus canoniquement, définir $R^i f_* E$ comme la limite (inductive, disons) de ce système. Parfois, on préfère «calculer» $R^i f_* E$ en utilisant d'autres types de résolutions. Supposons qu'on ait une résolution $E \rightarrow C$, où les composantes de $C = (C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots)$ sont acycliques pour f_* , i.e. telles que $R^q f_* C^n = 0$ pour tout $q > 0$ (et tout $n \geq 0$) (par exemple une résolution flasque, ou une résolution par des faisceaux mous, ou une résolution de Čech relative à un recouvrement ouvert convenable). Il existe alors un morphisme de résolutions $C \rightarrow I$, qui n'est plus en général une équivalence d'homotopie, mais qui, grâce à l'hypothèse faite sur C , est tel que $f_* C \rightarrow f_* I$ est encore un quasi-isomorphisme. On a donc $\mathcal{Z}^i f_* C \xrightarrow{\sim} R^i f_* E$ (d'où d'ailleurs un système transitif d'isomorphismes entre les $\mathcal{Z}^i f_* C$ relatifs aux divers choix de C). Mais la construction donne plus: la famille des complexes $f_* C$ associés aux résolutions à composantes acycliques pour f_* , qui forment une seule classe «à quasi-isomorphisme près». Plus précisément, deux tels complexes $f_* C, f_* C'$ sont reliés par des quasi-isomorphismes $f_* C \rightarrow f_* I \leftarrow f_* C'$. La connaissance de cette classe est bien sûr plus fine que celle des $R^i f_* E$, elle permet par exemple de reconstituer les groupes de cohomologie $H^n(X, E)$ comme groupes d'hypercohomologie $H^n(Y, f_* C)$ (ce qui donne naissance à la suite spectrale de Leray de f , nous reviendrons sur ce point plus loin).

1.3. C'est sans doute ce type de considérations qui a amené Grothendieck à proposer la construction suivante, très naturelle, mais révolutionnaire à l'époque: $C(A)$ désignant la catégorie des complexes d'une catégorie abélienne A , former la catégorie $D(A)$ déduite de $C(A)$ «en inversant formellement les quasi-isomorphismes». Cette nouvelle catégorie s'appellera «*catégorie dérivée*» de A ; le «*foncteur dérivé total*» droit (resp. gauche) d'un foncteur additif $F: A \rightarrow B$ devra être un certain «prolongement» de F en un foncteur RF (resp. LF) de $D(A)$ dans $D(B)$, redonnant les $R^i F$ (resp. $L^i F$) par application de H^i .

La construction de $D(A)$, ou plutôt du couple formé de $D(A)$ et du foncteur $C(A) \rightarrow D(A)$ comme solution d'un problème universel pour les foncteurs de $C(A)$ dans une catégorie D transformant quasi-isomorphismes en isomorphismes, ne pose pas de problème. Toutefois, Verdier observe qu'il est techniquement plus commode de passer par l'intermédiaire de la catégorie, notée $K(A)$, dite des complexes à homotopie près (qui a mêmes objets que $C(A)$, mais où les flèches sont les classes d'homotopie de morphismes de complexes), et d'effectuer la «localisation» en deux temps:

$$C(A) \rightarrow K(A) \rightarrow D(A),$$

le premier revenant à inverser formellement les homotopismes (ou équivalences d'homotopie), le second les (classes d'homotopie de) quasi-isomorphismes. La catégorie $D(A)$ a encore mêmes objets que $C(A)$. L'avantage de passer par $K(A)$ est qu'au lieu qu'une flèche $u: L \rightarrow M$ de $D(A)$ soit définie par une chaîne de flèches de $C(A)$ de longueur arbitraire

$$L \rightarrow \cdot \leftarrow \cdot \dots \rightarrow \cdot \leftarrow M$$

(où les flèches allant dans le «mauvais» sens sont des quasi-isomorphismes), u s'écrit comme une «fraction» $u = fs^{-1}$ ou $u = t^{-1}g$, où f, s, t, g sont des flèches de $K(A)$, et s, t des quasi-isomorphismes. Plus précisément, $D(A)$ s'obtient à partir de $K(A)$ par un «calcul de fractions bilatère»: les quasi-isomorphismes $t: M \rightarrow M'$ de $K(A)$ forment une catégorie filtrante I , et

$$(1.3.1) \quad \text{Hom}_{D(A)}(L, M) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ I}} \text{Hom}_{K(A)}(L, M')$$

(énoncé analogue «de l'autre côté»), cf. [17, I §§3, 4].

1.4. Les catégories $K(A)$ et $D(A)$ sont additives, mais ne sont pas en général abéliennes¹⁾. Cet inconvénient est pallié, dans une certaine mesure, par l'élément de structure fourni par la famille des «triangles distingués». Un *triangle* de $K(A)$ (resp. $D(A)$) est une suite de morphismes de $K(A)$ (resp. $D(A)$)

$$L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L[1]$$

(où $L[1]$ est le complexe défini par $L[1]^i = L^{i+1}$, $d_{L[1]} = -d_L$), notée aussi

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ +1 \swarrow & & \searrow \\ L & \longrightarrow & M \end{array} ;$$

on a une notion évidente de morphisme de triangles. On dit qu'un triangle est *distingué* s'il est isomorphe au triangle standard défini par le cône $C(u)$ d'un morphisme de complexes $u: E \rightarrow F$,

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{i} C(u) \xrightarrow{p} E[1],$$

où $C(u)^i = E^{i+1} \oplus F^i$, $d_{C(u)} = -d_E + u + d_F$, $i: F \rightarrow C(u)$ est l'injection

¹⁾ En fait, on peut montrer (Verdier, non publié) que $K(A)$ (resp. $D(A)$) n'est abélienne que si A est semi-simple (i.e. telle que toute suite exacte courte de A se scinde).

naturelle, et $p: C(u) \rightarrow E[1]$ est l'opposé de la projection naturelle. Par exemple, une suite exacte courte de complexes

$$0 \rightarrow L' \xrightarrow{u} L \xrightarrow{j} L'' \rightarrow 0$$

donne naissance à un triangle distingué $L' \rightarrow L \rightarrow L'' \xrightarrow{d} L'[1]$ de $D(A)$, caractérisé par le fait que

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & C(u) & \\
 & & & \downarrow s & \\
 L' & \longrightarrow & L & & L'[1] \\
 & & \swarrow & \searrow d & \\
 & & L'' & &
 \end{array}$$

soit un morphisme de triangles, où s est le quasi-isomorphisme donné par j sur L^i et 0 sur L'^{i+1} ; alors $H^i d: L''^i \rightarrow L'^{i+1}$ est l'opérateur bord habituel de la suite exacte longue de cohomologie (ceci explique le signe de p choisi plus haut).

Les triangles distingués de $K(A)$, $D(A)$, et de catégories qui s'en déduisent naturellement (sous-catégories pleines définies par des conditions de degré ou de finitude, catégories «quotients» obtenues par inversion formelle de certaines flèches) ont en commun un certain nombre de propriétés remarquables, que Verdier axiomatise en introduisant la notion de «catégorie triangulée». Une *catégorie triangulée* est une catégorie additive D , munie d'un automorphisme dit de translation, noté $L \mapsto L[1]$, et d'une famille de triangles dits distingués, soumis aux axiomes suivants, que nous recopions pour la commodité du lecteur (cf. [17], [V12]):

(T1) Tout triangle de D isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout objet L de D , le triangle $L \xrightarrow{\text{Id}} L \rightarrow 0 \rightarrow L[1]$ est distingué. Tout morphisme $u: L \rightarrow M$ de D est contenu dans un triangle distingué $L \xrightarrow{u} M \rightarrow N \rightarrow L[1]$.

(T2) Un triangle $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} L[1]$ est distingué si et seulement si le triangle $M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} L[1] \xrightarrow{-u[1]} M[1]$ est distingué.

(T3) Tout diagramme de D

$$\begin{array}{ccccccc}
 L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L[1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & L'[1] \quad ,
 \end{array}$$

où les lignes sont des triangles distingués et le carré est commutatif, se complète en un morphisme de triangles.

(T4) Pour tout couple de flèches $u:L \rightarrow M$, $v:M \rightarrow N$ de D et tout triplet de triangles distingués

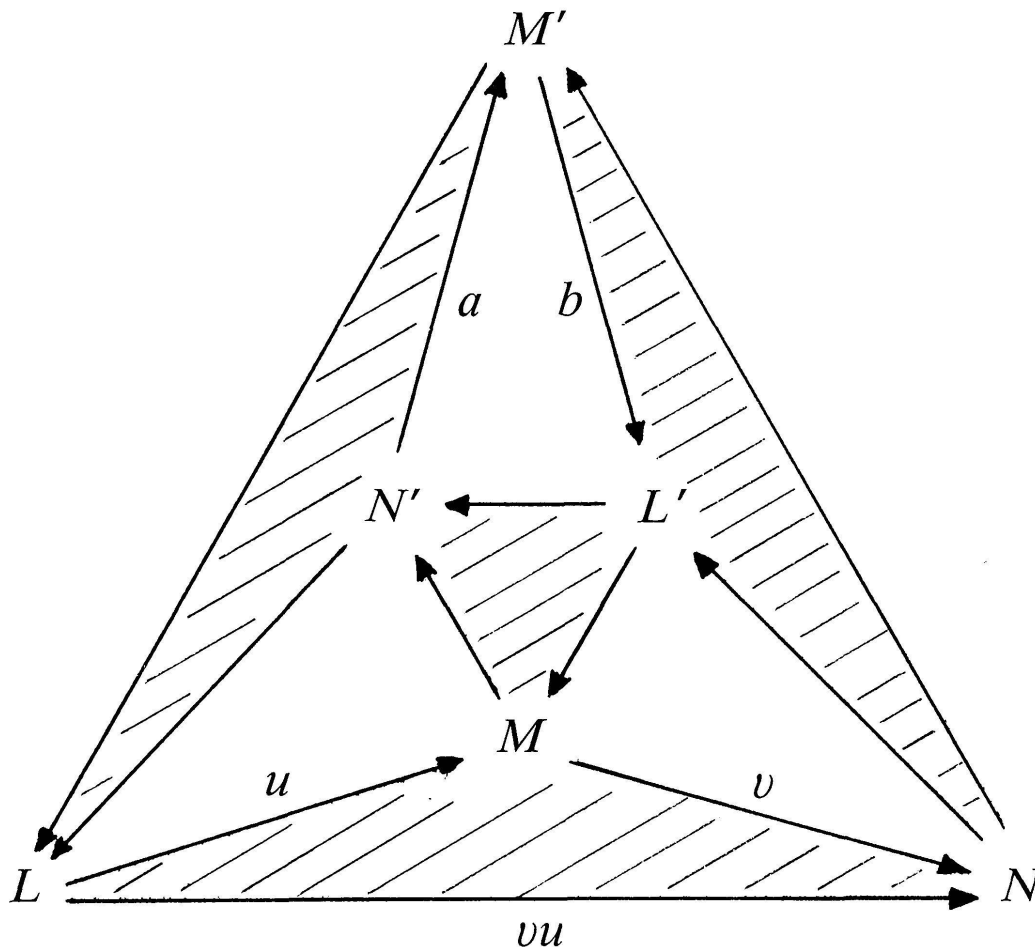
$$L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{x} N' \rightarrow L[1], \quad M \xrightarrow{v} N \rightarrow L' \xrightarrow{y} M[1], \quad L \xrightarrow{vu} N \rightarrow M' \rightarrow L[1],$$

il existe des flèches $a:N' \rightarrow M'$ et $b:M' \rightarrow L'$ telles que (Id_L, v, a) et (u, Id_N, b) soient des morphismes de triangles et que le triangle

$$N' \xrightarrow{a} M' \xrightarrow{b} L' \xrightarrow{x[1] \cdot y} N'[1]$$

soit distingué.

L'axiome (T4) s'appelle souvent *axiome de l'octaèdre*, en raison de la figure obtenue, où les quatre triangles hachurés sont commutatifs, et les quatre autres distingués :



Dans la catégorie $D(A)$, (T4) résulte d'un cas particulier du fait qu'une injection de suites exactes courtes de complexes s'insère dans un diagramme des

neuf (suite exacte courte de suites exactes courtes); Verdier remarque d'ailleurs que dans une catégorie triangulée, tout carré commutatif se prolonge en un «diagramme des neuf» [1, 1.1.11].

Une structure un peu plus faible que celle de catégorie triangulée, comprenant les axiomes (T1) à (T3) mais non (T4), a été dégagée pour la première fois, semble-t-il, par Puppe [25], pour exprimer les propriétés de la catégorie homotopique stable.

1.5. Un foncteur additif $F: A \rightarrow B$ entre catégories abéliennes se prolonge de façon naturelle en un foncteur additif $F: K(A) \rightarrow K(B)$, transformant triangles distingués en triangles distingués. Ce dernier, par contre, ne transforme pas en général quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes, donc ne se prolonge pas en un foncteur de $D(A)$ dans $D(B)$. C'est ce défaut qui est à l'origine de la définition (de Grothendieck-Verdier) des foncteurs dérivés «totaux»¹): un *foncteur dérivé droit* de F est un couple formé d'un foncteur $RF: D(A) \rightarrow D(B)$ et d'un morphisme $m: F \rightarrow RF$ (entre foncteurs de $K(A)$ dans $D(B)$),

$$\begin{array}{ccc} K(A) & \longrightarrow & D(A) \\ F \downarrow & & \downarrow RF \\ K(B) & \longrightarrow & D(B) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ m \end{array}$$

universel en un sens évident (à savoir que, pour tout couple $(F': D(A) \rightarrow D(B), m': F \rightarrow F')$, il existe un unique morphisme $u: RF \rightarrow F'$ tel que $m' = um$); de même, un *foncteur dérivé gauche* de F est un couple formé d'un foncteur $LF: D(A) \rightarrow D(B)$ et d'un morphisme $m: LF \rightarrow F$ possédant une propriété universelle analogue.

Le formalisme des catégories triangulées — et notamment la théorie de «localisation» qu'il y développe — fournit à Verdier un cadre commode pour l'étude de l'existence et des propriétés de transitivité des foncteurs dérivés. Le plus souvent, le dérivé droit RF n'est pas défini sur la catégorie $D(A)$ tout entière, mais seulement sur la sous-catégorie pleine $D^+(A)$ formée des objets à cohomologie bornée inférieurement (qui est aussi la catégorie déduite de $K^+(A)$ (formée des complexes à degré borné inférieurement) par inversion des quasi-isomorphismes): plus précisément, c'est le problème universel analogue relatif à $F: K^+(A) \rightarrow K^+(B)$ qui admet une solution. C'est le cas par exemple si A possède suffisamment d'objets injectifs (i.e. tout objet de A se plonge dans un objet injectif); alors $H^i RF$ est le i -ième foncteur dérivé

¹) Ce qualificatif (destiné à marquer la distinction avec les foncteurs «traditionnels» $R^i F, L^i F$) ne s'emploie plus guère aujourd'hui.

«usuel» $R^i F$; de plus RF transforme triangles distingués de $D^+(A)$ en triangles distingués de $D^+(B)$; si $0 \rightarrow L' \rightarrow L \rightarrow L'' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de complexes (appartenant à $K^+(A)$), on en déduit (cf. 1.4) un triangle distingué $L' \rightarrow L \rightarrow L'' \rightarrow L'[1]$ de $D(A)$, d'où un triangle distingué $RFL' \rightarrow RFL \rightarrow RFL'' \xrightarrow{d} RFL'[1]$ de $D(B)$, et $H^i d: R^i FL'' \rightarrow R^{i+1} FL'$ est l'opérateur bord usuel. Le prototype de cette situation est le cas où F est le foncteur image directe f_* des \mathcal{S}_X -modules vers les \mathcal{S}_Y -modules, où $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces (voire de topos) annelés. Le principe de la définition de RF est simple: pour $L \in K^+(A)$, on choisit un quasi-isomorphisme $L \xrightarrow{q} I$, où $I \in K^+(A)$ est à composantes injectives (il en existe si A admet assez d'injectifs), et l'on «pose» $RFL = FI$, $m = Fq: FL \rightarrow FI$. Quand de plus F est de dimension cohomologique finie (ce qui veut dire qu'il existe un entier N tel que $R^i F = 0$ pour $i > N$), alors RF est défini sur la catégorie $D(A)$ tout entière. De manière analogue, le dérivé gauche LF n'est défini le plus souvent que sur la sous-catégorie pleine $D^-(A)$ formée des complexes à cohomologie bornée supérieurement (qui est aussi la catégorie déduite de $K^-(A)$ (formée des complexes à degré borné supérieurement) par inversion des quasi-isomorphismes). La situation est en fait moins bonne que pour les dérivés droits, car il est rare que A possède suffisamment de projectifs; le prototype est le cas du foncteur $F = f^*$ pour un morphisme f comme ci-dessus: bien qu'il n'y ait pas, en général, assez de projectifs dans la catégorie des \mathcal{S}_Y -modules, on parvient à définir $Lf^*: D^-(Y) \rightarrow D^-(X)$ (où $D(-)$ désigne la catégorie dérivée de celle des \mathcal{S} -modules), en «posant» $Lf^*L = f^*P$, où $P \rightarrow L$ est un quasi-isomorphisme avec P à composantes plates et à degré borné supérieurement.

Si $G: B \rightarrow C$ est un second foncteur additif entre catégories abéliennes, alors, sous des hypothèses convenables, on a un isomorphisme de transitivité

$$R(GF) \xrightarrow{\sim} (RG)(RF) \quad (\text{resp. } L(GF) \xrightarrow{\sim} (LG)(LF)) .$$

entre foncteurs de $D^+(A)$ dans $D^+(C)$ (resp. de $D^-(A)$ dans $D^-(C)$) (voire de $D(A)$ dans $D(C)$). Pour les dérivés droits, c'est le cas par exemple si B possède assez d'objets injectifs et F transforme injectifs de A en objets acycliques pour G (i.e. sur lesquels $R^i G = 0$ pour $i > 0$). A titre d'illustration, on peut prendre pour F le foncteur f_* de tout à l'heure et pour G le foncteur sections globales $\Gamma(Y, -)$ (car l'image directe d'un injectif est flasque). L'isomorphisme $\Gamma(Y, f_* E) \simeq \Gamma(X, E)$ se dérive alors en

$$R\Gamma(Y, Rf_* L) \simeq R\Gamma(X, L) \quad (L \in D^+(X)) .$$

C'est la formule à laquelle j'ai fait allusion à la fin de 1.2, et qui, par la suite spectrale des foncteurs composés, fournit la suite spectrale de Leray de f

$$E_2^{pq} = H^p(Y, R^q f_* L) \Rightarrow H^*(X, L) .$$

Au lieu de partir d'un foncteur additif $F: A \rightarrow B$, on peut considérer plus généralement un foncteur exact $F: K(A) \rightarrow K(B)$ (ou $K^*(A) \rightarrow K(B)$, $*$ = + ou -), «exact» voulant dire additif et transformant triangles distingués en triangles distingués, et définir de manière analogue les notions de dérivés droit et gauche de F . On peut aussi considérer des multifoncteurs $K(A_1) \times \dots \times K(A_n) \rightarrow K(B)$ covariants en certains arguments et contravariants en les autres, et étendre la théorie des foncteurs dérivés à ce cadre.

Le formalisme des foncteurs dérivés fournit une interprétation intéressante des homomorphismes dans la catégorie dérivée. Si A possède assez d'injectifs, le bifoncteur «complexe des homomorphismes»

$$\text{Hom}^\cdot : K(A)^0 \times K(A) \rightarrow K(\mathbf{Z}) , \quad (L, M) \mapsto \text{Hom}^\cdot(L, M)$$

(où $C(\mathbf{Z})$ désigne la catégorie des complexes de groupes abéliens et C^0 la catégorie opposée à une catégorie C) se dérive en un bifoncteur

$$R\text{Hom} : D(A)^0 \times D^+(A) \rightarrow D(\mathbf{Z})$$

et l'on a un isomorphisme canonique

$$\text{Hom}_{D(A)}(L, M) = H^0 R\text{Hom}(L, M)$$

pour $L \in D(A)$, $M \in D^+(A)$. En pratique, cette formule est beaucoup plus utile que (1.3.1). Si A est la catégorie des \mathcal{O}_X -modules sur un espace (ou topos) annelé, on peut en effet analyser le second membre à l'aide du foncteur dérivé $R\mathcal{H}om$ du foncteur $\mathcal{H}om^\cdot$ («complexe des faisceaux d'homomorphismes de \mathcal{O}_X -modules»): la formule $\Gamma(X, \mathcal{H}om^\cdot(L, M)) \simeq \text{Hom}^\cdot(L, M)$ se dérive en

$$R\Gamma(X, R\mathcal{H}om(L, M)) \simeq R\text{Hom}(L, M)$$

(pour $L \in D^-(X)$, $M \in D^+(X)$), d'où

$$(*) \quad \text{Hom}_{D(X)}(L, M) \simeq H^0(X, R\mathcal{H}om(L, M))$$

(0-ième groupe d'hypercohomologie de X à valeurs dans le complexe $R\mathcal{H}om(L, M)$); des informations sur les faisceaux de cohomologie de L et M permettent alors, grâce à (*), d'obtenir, par diverses suites spectrales, des renseignements sur le groupe $\text{Hom}_{D(X)}(L, M)$, parfois de le calculer complètement.

Deligne a introduit dans (SGA 4 XVII 1.2) une notion légèrement différente de foncteur dérivé, un peu plus souple en ce qu'elle permet de parler de «dérivabilité en un point» (i.e. en une valeur donnée de l'argument). Dans la plupart des cas, elle coïncide néanmoins avec la notion précédente.

1.6. Si A est une catégorie abélienne, A se trouve plongée de façon naturelle dans la catégorie dérivée $D(A)$, comme sous-catégorie pleine formée des complexes concentrés en degré zéro. Ce n'est pas le seul exemple d'une catégorie abélienne plongée dans la catégorie dérivée. La théorie des faisceaux pervers en fournit d'autres, non triviaux. Pour l'étude systématique de ces plongements, le formalisme des catégories triangulées s'avère être un outil efficace, comme le montrent Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber [1] (pour un historique de la théorie des faisceaux pervers et une vue d'ensemble de ses développements, je renvoie le lecteur au rapport de Kleiman [22]).

1.7. Dans une catégorie triangulée D , toute flèche $u: L \rightarrow M$ admet, d'après (T1), un «cône» N , i.e. s'insère dans un triangle distingué $L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L$ [1]. Il résulte des autres axiomes que N est unique à isomorphisme près, cet isomorphisme n'étant toutefois pas unique. Si $u: L \rightarrow M$, $u': L' \rightarrow M'$ sont des bases de triangles distingués de troisièmes sommets N, N' , tout morphisme des bases se prolonge, d'après (T3), en un morphisme de triangles, mais le morphisme des cônes correspondant $N \rightarrow N'$ n'est pas unique, et il n'existe pas *a priori* de choix canonique (en fait, comme le montre Verdier dans sa thèse, l'existence d'un «foncteur cône» imposerait des restrictions draconiennes à D : par exemple, si $D = D(A)$, la catégorie abélienne A serait semi-simple). Cette difficulté est à l'origine de la théorie des catégories dérivées filtrées [18, V], où la construction cône, non fonctorielle, est remplacée par celle de gradué associé, qui l'est. Ce formalisme et ses généralisations jouent un rôle essentiel dans la théorie de Hodge mixte de Deligne (cf. [5], [6], et, plus récemment, [26], [27]). Il n'a toutefois pas été dégagé de structure axiomatique jouant vis-à-vis des catégories dérivées filtrées le même rôle que les catégories triangulées vis-à-vis des catégories dérivées ordinaires.

2. DUALITÉ

Comme on l'a dit au début, ce sont les théories de dualité qui ont constitué la motivation initiale pour l'introduction des catégories dérivées. Elles en ont fourni aussi les applications les plus remarquables.