

Objektyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1990)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

## EXTERIOR ALGEBRAS AND THE QUADRATIC RECIPROCITY LAW

by G. ROUSSEAU

ABSTRACT. As is known, the theory of exterior algebras can be used to derive the properties of determinants and of the signature of permutations (cf. Chevalley, "Fundamental Concepts of Algebra", N.Y., 1956). We show that the properties of the Jacobi symbol, including reciprocity, can also be derived easily from this source.

---

In this note we consider the connection between a certain identity for exterior algebras and the quadratic reciprocity law.

It is easily shown that if  $M$  is a module then, in the exterior algebra of  $M$ ,

$$(1) \quad \bigwedge_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^n a_{i,j} = (-1)^{\binom{m}{2}\binom{n}{2}} \bigwedge_{j=1}^n \bigwedge_{i=1}^m a_{i,j}$$

for all  $a_{i,j} \in M$ . However it is also easily shown that this identity is equivalent, in case  $m$  and  $n$  are odd and relatively prime, to the reciprocity law for the Jacobi symbol

$$(2) \quad (n|m) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \frac{n-1}{2}} (m|n) .$$

This provides a very simple and transparent treatment of quadratic reciprocity. Apart from the formulation in terms of exterior algebras, which though convenient is not essential, this approach is substantially that of Zolotarev (cf. [9], [1], [7]). It is curious that it is so little known considering the attention given in the literature to Zolotarev's Theorem (which appears in [9] as a preliminary to the proof of the reciprocity law).

After definitions and preliminaries in 1, we prove (1), and the equivalence of (1) and (2), in 2. Other formulas such as the two supplementary laws and the second multiplicativity formula are considered briefly in 3, together with