2. Energie cinétique et courbure

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}_{|s=0} \| \dot{\gamma}_{sX} \|^2 = 2\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle + 2 \| D_{\dot{\gamma}} X \|^2 ,$$

ce qui nous donne pour $\| \dot{\gamma}_{sX} \|^2$ le développement

(3) $$\| \dot{\gamma}_{sX} \|^2 = \| \dot{\gamma} \|^2 + 2s\langle D_{\dot{\gamma}} X, \dot{\gamma} \rangle + s^2(\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle + \| D_{\dot{\gamma}} X \|^2) + o(s^2) .$$

La traînée de notre haltère est donc proportionnelle à

(4) $$\frac{1}{2}(\| \dot{\gamma}_{\delta X} \|^2 + \| \dot{\gamma}_{-\delta X} \|^2) = \| \dot{\gamma} \|^2 + \delta^2(\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle + \| D_{\dot{\gamma}} X \|^2) + o(\delta^2) ,$$

et cette expression devient minimale — modulo $o(\delta^2)$ — pour $D_{\dot{\gamma}} X = 0$, c'est-à-dire lorsque X est parallèle le long de la courbe γ.

Il est essentiel de considérer un segment géodésique symétrique par rapport au point $\gamma(t)$, pour éliminer le terme de premier ordre en δ. C'est aussi raisonnable du point de vue de l'interprétation physique: Nous éliminons ainsi le moment provoqué par une asymétrie de l'haltère. Le terme $\delta^2 \| D_{\dot{\gamma}} X \|^2$ peut être interprété comme traînée due à une rotation de l'haltère relative à un haltère déplacé parallèlement, et le transport parallèle est le déplacement naturel d'un haltère symétrique dans le sens suivant: On déplace le centre de l'haltère, et la traînée provoquée par les deux bouts est équilibrée de sorte que la traînée totale soit minimale.

Dans la dernière formule, on a toujours le terme $\delta^2\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle$. Il dépend du tenseur de courbure de la variété et du vecteur X, mais non de sa dérivée covariante $D_{\dot{\gamma}} X$. Cela implique que pour $R \neq 0$ on peut parfois diminuer la traînée au futur en l'augmentant momentanément, c'est-à-dire en admettant $D_{\dot{\gamma}} X \neq 0$ pour un certain temps: Prenons par exemple pour γ l'équateur de la sphère S^2, et pour X un vecteur qui au début n'est pas dans la direction nord-sud. En le tournant lentement vers une position nord-sud, nous augmentons la traînée pendant cette phase, mais après elle sera inférieure à sa valeur au départ.

2. Energie cinétique et courbure

Pour étudier le rôle du terme $\delta^2\langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle$, nous observons d'abord qu'à la place de la traînée on pourrait aussi bien parler de l'énergie cinétique de notre haltère si les deux extrémités représentent deux points de masse ayant la même masse. Cette interprétation s'applique aussi dans le cas où nous déplaçons toute une boule géodésique et non seulement deux points de masse. Admettons encore un déplacement parallèle, c'est-à-dire sans composante de rotation, et supposons que la boule soit homogène, de densité ρ. Chaque point de la boule parcourt alors une courbe γ_{sX} avec $0 \leqslant s \leqslant \delta$ et où X est un champ de vecteurs parallèle le long de γ tel que $X(t) \in S^{n-1}$, la sphère-unité dans $T_{\gamma(t)}M$. Si B_δ est la boule géodésique de rayon δ, son énergie cinétique est

$$E = \frac{\rho}{2} \int_{B_\delta} \| \dot{\gamma}_{sX} \|^2 dV^n = \frac{\rho}{2} \int_0^\delta \int_{S^{n-1}} \| \dot{\gamma}_{sX} \|^2 (1 + h(s, X)) dV^{n-1} s^{n-1} ds \,.$$

Ici, dV^n est l'élément de volume de la variété M et dV^{n-1} celui de la sphère S^{n-1} dans l'espace euclidien $T_{\gamma(t)}M$, et la fonction $h(s, X)$ est une fonction d'ordre $O(s^2)$ en s, car l'élément de volume de la sphère géodésique de rayon s est de la forme

$$s^{n-1}(1 + h(s, X)) dV^{n-1} \,.$$

En exprimant l'intégrand $\| \dot{\gamma}_{sX} \|^2$ par (3), et avec l'hypothèse $D_{\dot{\gamma}} X = 0$ nous obtenons

$$E = \frac{\rho}{2} \| \dot{\gamma} \|^2 vol(B_\delta) + \frac{\rho}{2} \int_0^\delta \int_{S^{n-1}} \langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle dV^{n-1} s^{n+1} ds + o(\delta^{n+2}) \,.$$

Or, avec $\dot{\gamma} = \| \dot{\gamma} \| \tau$ nous avons

$$\text{(5)} \qquad \int_{S^{n-1}} \langle R(X, \dot{\gamma})X, \dot{\gamma} \rangle dV^{n-1} = - \| \dot{\gamma} \|^2 \int_{S^{n-1}} \langle R(X, \tau)\tau, X \rangle dV^{n-1}$$
$$= - \| \dot{\gamma} \|^2 \frac{vol(S^{n-1})}{n} Ric(\tau, \tau) \,,$$

où Ric est le tenseur de Ricci. Finalement nous obtenons

$$\text{(6)} \qquad E = \frac{m}{2} \| \dot{\gamma} \|^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{n+2} Ric(\tau, \tau) + o(\delta^2) \right),$$

où m est la masse de la boule.

Le tenseur de Ricci mesure donc la différence de l'énergie cinétique si nous remplaçons une boule homogène par un point de masse en concentrant toute la masse de la boule en son centre. Notamment, les deux énergies sont les mêmes à une erreur relative d'ordre $o(\delta^2)$ près si la variété riemannienne M est Ricci-plate. (Voir aussi [1] sur le tenseur de Ricci.)