L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 117-124

LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE DE V. JONES ET LA PÉRIODICITÉ DES ALGÈBRES DE CLIFFORD

par Hélène DHERTE

§ 0. INTRODUCTION

Soit $1 \in N \subseteq M$ une paire d'anneaux à unité. On note $\mathrm{End}_N(M)$ l'anneau des endomorphismes de M vu comme N-module à droite. Pour tout $x \in M$, la multiplication à gauche $\lambda(x)$ par x dans M appartient à $\mathrm{End}_N(M)$; on identifie ci-dessous M à son image par $\lambda : M \to \mathrm{End}_N(M)$.

Cette *construction fondamentale* fournit ainsi une paire $1 \in M \subseteq \mathrm{End}_N(M)$ à partir de $1 \in N \subseteq M$. En itérant, on obtient une *tour*:

$$1 \in M_0 = N \subseteq M_1 = M \subseteq \ldots \subseteq M_k \subseteq M_{k+1} \subseteq \ldots$$

dont l'intérêt a été mis en évidence par V. Jones, d'abord lorsque M et N sont des algèbres de von Neumann qui sont des facteurs de type II_1, ensuite dans d'autres cas et en particulier lorsque M et N sont des algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps parfait (voir [J01], [J02], [GHJ]).

Un invariant numérique fort intéressant introduit par Jones et lié à la construction fondamentale est l'*indice* de N dans M, qui est par définition

$$[M : N] = \limsup_{k \to \infty} \mathrm{rk}\,(M_k/M_0)^{1/k}$$

où $\mathrm{rk}\,(M_k/M_0)$ est le *rang* de M_k sur M_0, c'est-à-dire le plus petit nombre de générateurs de M_k comme M_0-module à droite.

Ce travail est consacré à l'étude d'exemples où M est libre comme N-module à droite. Plus précisément, au § 1, nous montrons comment la construction fondamentale permet de retrouver certains résultats bien connus sur les algèbres de Clifford. Au § 2, nous calculons des valeurs d'indices, et nous donnons en particulier une preuve courte de l'égalité

$$[\mathbf{K}[G] : \mathbf{K}[H]] = [G : H]$$

où G est un groupe fini, $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique nulle, $\mathbf{K}[G]$ l'algèbre de G sur $\mathbf{K}$ et H un sous-groupe de G (voir [J02]).

Les résultats contenus dans cet article proviennent d'un travail de fin d'études réalisé en 1987-1988 à l'Université Libre de Bruxelles sous la direction de A. Valette.

§ 1. Algèbres de Clifford

Soient $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de deux, V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie m et

$$< .,. > : V \times V \to \mathbf{K}$$

une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On note $\mathrm{Cliff}(V)$ l'algèbre de Clifford de cette forme. Soit W un hyperplan de V tel que la restriction $< .,. > |_W$ est non dégénérée. L'objet de ce paragraphe est l'étude de la paire d'algèbre $\mathrm{Cliff}(W) \subseteq \mathrm{Cliff}(V)$ (ces algèbres sont semi-simples [Sch]).

Lemme 1. *L'algèbre* $\mathrm{Cliff}(V)$ *est libre de rang 2 comme* $\mathrm{Cliff}(W)$-*module à droite.*

Preuve. Soit $e_m \in V$ un vecteur tel que $<e_m, e_m> \neq 0, e_m \notin W$ et $e_m^\perp = W$. Montrons que $\{1, e_m\}$ est une base de $\mathrm{Cliff}(V)$ comme $\mathrm{Cliff}(W)$-module à droite. En effet, si $\{e_1, ..., e_{m-1}\}$ est une base orthogonale de W (une telle base existe [Sch]) alors $\{e_1, ..., e_{m-1}, e_m\}$ est une base orthogonale de V et en utilisant les relations entre les générateurs de $\mathrm{Cliff}\, V$, on peut écrire de manière unique tout élément de $M = \mathrm{Cliff}\, V$ sous la forme

$$\sum \lambda_I e_I + e_m \sum \lambda_J e_J$$

(sommes sur I et $J \subset \{1, ..., m-1\}$) où

$$e_I = e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} \quad \text{si} \quad I = \{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., m-1\}. \qquad \square$$

Posons $N = \mathrm{Cliff}(W) \subset M = \mathrm{Cliff}(V)$ et $L = \mathrm{End}_N(M)$. Il résulte du lemme que $L = \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K}) \otimes N$ (nous notons $\mathrm{Mat}_l(\mathbf{K})$ l'algèbre des matrices $l \times l$ à coefficients dans $\mathbf{K}$). Nous allons identifier L à une algèbre de Clifford. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une base de V, et $(e_I)_{I \subset \{1, ..., m\}}$ la base associée de $\mathrm{Cliff}(V)$, comme dans la preuve du lemme 1. Soit $\mathrm{tr}: M \to \mathbf{K}$ la forme linéaire définie par $\mathrm{tr}(e_\varnothing) = 1$ et $\mathrm{tr}(e_I) = 0$ si $I \neq \emptyset$.

On vérifie que tr est une trace ($\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ pour tous $x, y \in M$) qui est fidèle (au sens que la forme bilinéaire $(x, y) \to \mathrm{tr}(xy)$ est non dégénérée); tr ne dépend pas du choix de la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ et sa restriction à N est encore fidèle. On peut donc définir la projection orthogonale

$$E \begin{cases} M & \to \quad N \\ \sum \lambda_I e_I + e_m \sum \lambda_J e_J & \mapsto \sum \lambda_I e_I \end{cases}$$

(sommes sur $I, J \subset \{1, ..., m-1\}$) relative à la forme $(x, x') \mapsto \operatorname{tr}(xx')$. On montre que E possède les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(E(x)) &= \operatorname{tr}(x)\,, \ \forall x \in M \\ E(y) &= y\,, \ \forall y \in N \\ E(xy) &= E(x)y\,, \ \forall x \in M, y \in N \\ E(yx) &= yE(x)\,, \ \forall x \in M, y \in N \end{aligned}$$

(voir [GHJ] 2.6.2). En d'autres termes, E est une *espérance conditionnelle* de M sur N. On vérifie aussi qu'elle est *fidèle*: si $x \in M$ est tel que $E(xx') = 0$ pour tout $x' \in M$, alors $x = 0$. La troisième propriété ci-dessus montre que $E \in L$.

Lemme 2. *Avec les notations précédentes, on pose* $a = \langle e_m, e_m \rangle$ *et* $F = 2E - 1$. *Alors*

(i) $N^\perp = \lambda(e_m)(N)$,

(ii) $\lambda(e_m) F \lambda(e_m) = -aF$ *dans* L.

Preuve. (i) Si $x, y \in N$, on a $\operatorname{tr}(e_m xy) = 0$ et puisque $e_m x \in \lambda(e_m)N$, il vient $\lambda(e_m)N \subseteq N^\perp$.

Pour montrer l'inclusion inverse, remarquons que comme $\dim N = 2^{m-1}$, $\dim M = 2^m$ et $M = N \oplus N^\perp$, on a $\dim N^\perp = 2^{m-1}$. De plus $\lambda(e_m): N \to N^\perp$ est bijective puisque $\lambda(e_m)^2 = a \cdot 1_M$. On en tire $N^\perp = \lambda(e_m)N$.

(ii) Soit $y \in N$. Alors $F\lambda(e_m)y = -\lambda(e_m)y$ puisque $F = 2E - 1$ et $N^\perp = \lambda(e_m)N = -\lambda(e_m)Fy$.

Soit $x \in N^\perp$, alors $F\lambda(e_m)x = \lambda(e_m)x = -\lambda(e_m)Fx$.

Donc $F\lambda(e_m) = -\lambda(e_m)F$ et on a le résultat annoncé en multipliant à gauche par $\lambda(e_m)$. $\square$

Notons $V \oplus -a$ l'espace vectoriel $V \oplus \mathbf{K}$ muni de la forme bilinéaire symétrique $((x, \lambda), (x', \lambda')) \mapsto \langle x, x' \rangle - a\lambda\lambda'$.

THÉORÈME. *Soit* $L = \mathrm{End}_N(M)$ *le résultat de la construction fondamentale appliquée à* $N = \mathrm{Cliff}(W) \subseteq M = \mathrm{Cliff}(V)$. *Alors* L *est isomorphe à* $\mathrm{Cliff}(V \oplus -a)$.

Preuve. Notons e_{m+1} un vecteur de base de $V \oplus - a$ correspondant au second facteur.

Puisque $\dim L = \dim_{\mathbf{K}}(N \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K})) = 2^{m+1} = \dim(\mathrm{Cliff}(V \oplus -a))$ il suffit de montrer que $\mathrm{Cliff}(V \oplus -a)$ se surjecte sur L. Montrons que l'application

$$\alpha : \begin{cases} w \longmapsto \lambda(w) & \\ e_m \longmapsto \lambda(e_m) & \qquad (w \in W) \\ e_{m+1} \longmapsto \lambda(e_m)F & \end{cases}$$

s'étend en un homomorphisme de $\mathrm{Cliff}(V \oplus -a)$ sur L. Puisque $F^2 = 1$, en utilisant le lemme 2, on a $\alpha(e_{m+1})^2 = -a$. De plus, $\alpha(e_{m+1})$ anticommute avec les générateurs de $\mathrm{Cliff}(V)$ à nouveau par le lemme 2:

$$\alpha(e_{m+1})\alpha(e_m) = -\alpha(e_m)\alpha(e_{m+1}),$$

et si $w \in W$

$$\begin{aligned} \alpha(e_{m+1})\lambda(w) &= \lambda(e_m)F\lambda(w) \\ &= \lambda(e_m)\lambda(w)F \quad \text{par } N\text{-linéarité de } F \\ &= -\lambda(w)\lambda(e_m)F \quad \text{puisque} \quad \langle w, e_m \rangle = 0 \\ &= -\alpha(w)\alpha(e_{m+1}). \end{aligned}$$

Les relations qui définissent $\mathrm{Cliff}(V \oplus -a)$ montrent alors que α s'étend bien en un homomorphisme d'algèbres.

Il reste à montrer que cet homomorphisme est surjectif. Comme l'espérance conditionnelle E est fidèle et que M est libre comme N-module à droite, on peut appliquer la proposition 2.6.3 de [GHJ], qui assure que L est engendrée comme algèbre par $\lambda(M)$ et E; mais $\lambda(M)$ est clairement dans l'image de notre homomorphisme, et E y est aussi car

$$E = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a}\alpha(e_m)\alpha(e_{m+1})\right). \qquad \square$$

Comme conséquence, on obtient le résultat suivant, démontré différemment dans [Ka] Chap. III, 3.14 et 3.16:

COROLLAIRE 1. $\mathrm{Cliff}(W \oplus a \oplus -a) \cong \mathrm{Cliff}(W) \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K})$.

Si $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, deux formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur deux espaces de même dimension sont isomorphes. Notons

Cliff_m l'algèbre de Clifford d'une telle forme sur $\mathbf{K}^m$. Le corollaire 1 montre l'égalité $\mathrm{Cliff}_{m+2} \cong \mathrm{Cliff}_m \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K})$, connue sous le nom de *périodicité des algèbres de Clifford* sur $\mathbf{K}$. Le corollaire suivant en est une conséquence immédiate.

COROLLAIRE 2. *Pour* $\mathbf{K}$ *algébriquement clos, on a* $\mathrm{Cliff}_m \cong \mathrm{Mat}_{2^{m/2}}(\mathbf{K})$ *lorsque* m *est pair, et* $\mathrm{Cliff}_m \cong \mathrm{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K}) \oplus \mathrm{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K})$ *lorsque* m *est impair.*

§ 2. VALEURS DE L'INDICE

La preuve du lemme suivant résulte immédiatement de la définition de l'indice donnée dans l'introduction.

LEMME 3. *Soit* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'anneaux et soit* l *un entier tels que chaque étage* M_k *de la tour associée par construction fondamentale soit un* M_k*-module libre de rang* 1. *Alors* $[M : N] = l$.

COROLLAIRE. *Avec les notations du* § 1 $[\mathrm{Cliff}(V) : \mathrm{Cliff}(W)] = 2$.

Il peut être intéressant d'avoir un critère qui assure que les hypothèses du lemme 3 sont vérifiées. Pour cela, on aura besoin de la notion de trace markovienne. Si $1 \in N \subseteq M$ est une paire d'algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbf{K}$, et si $\beta \in \mathbf{K}^{\times}$, une trace tr sur M est *markovienne de module* β si tr et sa restriction $\mathrm{tr}\backslash_N$ sont fidèles, et s'il existe une trace $\mathrm{Tr} : L = \mathrm{End}_N(M) \to \mathbf{K}$ telle que $\mathrm{Tr}(\lambda(x)) = \mathrm{tr}(x)$ et $\beta \mathrm{Tr}(\lambda(x)E) = \mathrm{tr}(x)$ pour tout $x \in M$, où E est l'espérance conditionnelle définie avant le lemme 2. On peut alors montrer que Tr est elle-même markovienne de module β pour la paire $M \subset L$ ([GHJ] 2.7.4), ce qui permet de définir une trace sur $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ et une suite d'espérances conditionnelles fidèles $E_k : M_k \to M_{k-1}$.

On vérifie aisément que la trace tr définie sur $\mathrm{Cliff}(V)$ au § 1 est markovienne de module 2.

LEMME 4. *Soient* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'algèbres de dimension finie sur* $\mathbf{K}$, *et* $E : M \to N$ *une espérance conditionnelle fidèle. Si* M *est libre de rang* l *comme* N*-module à droite, alors* $L = \mathrm{End}_N(M)$ *est libre de rang* l *comme* M*-module à droite.*

Preuve. Par la proposition 2.6.3 de [GHJ], l'application

$$\phi : M \otimes_N M \to L : x \otimes y \mapsto \lambda(x) E \lambda(y)$$

est un isomorphisme de M-modules à droite. Mais $M \otimes_N M \cong N^l \otimes_N M \cong M^l$ où le dernier isomorphisme est donné par l'application M-linéaire à droite:

$$(y_1, \ldots, y_l) \otimes x \mapsto (y_1 x, \ldots, y_l x), \quad y_i \in N, x \in M . \qquad \square$$

Des lemmes 3 et 4, on déduit immédiatement que $[M : M] = 1$ et $[M : \mathbf{K}] = \dim(M)$ pour une $\mathbf{K}$-algèbre unitale M de dimension finie.

PROPOSITION 1. *Soient* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'algèbres de dimension finie sur* $\mathbf{K}$. *S'il existe une trace markovienne sur* M, *et si* M *est libre de rang* l *comme* N*-module à droite, alors les hypothèses de lemme* 3 *sont satisfaites. En particulier,* $[M : N] = l$.

Preuve. Grâce à l'existence d'une trace markovienne sur M, chaque M_k est munie d'une trace markovienne tr_k et d'une espérance conditionnelle $E_k : M_k \to M_{k-1}$, fidèle puisque M est de dimension finie.

En procédant par induction à partir du lemme 4, on voit que M_k est libre de rang l sur M_{k-1} et donc $M_{k+1} = \mathrm{End}_{M_{k-1}}(M_k)$ est libre de rang l sur M_k. $\square$

Un cas où la proposition 1 s'applique est celui des algèbres de groupes. Soient G un groupe fini (d'ordre noté $|G|$), H un sous-groupe et $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle. On rappelle que l'algèbre de groupe $\mathbf{K}[G]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{g \in G} a_g \cdot g \, (a_g \in \mathbf{K})$ où le produit est donné par $g_1 \cdot g_2 = g_1 g_2 (g_1, g_2 \in G)$. Comme $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle, $\mathbf{K}[G]$ est semi-simple (voir [Se]).

L'inclusion $1 \in \mathbf{K}[H] \subseteq \mathbf{K}[G]$ fournit un exemple de paire d'algèbres semi-simples de dimension finie. La fonctionnelle linéaire sur $\mathbf{K}[G]$ définie par

$$\mathrm{tr}\,(\sum_{g \in G} a_g \cdot g) = a_1$$

est une trace fidèle dont la restriction à $\mathbf{K}[H]$ est fidèle. L'espérance conditionnelle $E : \mathbf{K}[G] \to \mathbf{K}[H]$ associée s'écrit

$$E(\sum_{g \in G} a_g \cdot g) = \sum_{g \in H} a_g \cdot g .$$

PROPOSITION 2. *Si* $\mathbf{K}$ *est de caractéristique nulle,*

$$[\mathbf{K}[G]:\mathbf{K}[H]] = [G:H].$$

Cette proposition est en fait bien connue ([J01], [J02]); c'est elle qui justifie l'appellation d'indice. La preuve ci-dessous semble neuve:

Preuve de la proposition 2. Remarquons que $\mathbf{K}[G]$ est libre de rang $[G:H]$ comme $\mathbf{K}[H]$-module à droite: en effet, le choix d'un système de représentants pour les classes latérales gauches de H dans G fournit une base de $\mathbf{K}[G]$ comme $\mathbf{K}[H]$-module à droite. Montrons d'autre part que tr est markovienne de module $[G:H]$ sur $\mathbf{K}[G]$.

Pour cela, considérons $\mathrm{End}_{\mathbf{K}[H]}(\mathbf{K}[G])$ comme une sous-algèbre de l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}[G]) = \mathrm{Mat}_{|G|}(\mathbf{K})$. Cette dernière algèbre est munie de la trace

$$S \mapsto \frac{1}{|G|}\,\mathrm{Tr}\,(S)$$

où Tr est la trace usuelle sur $\mathrm{Mat}_{|G|}(\mathbf{K})$.
Il est alors banal de vérifier que

$$\frac{1}{|G|}\,\mathrm{Tr}\,\lambda(1) = \mathrm{tr}\,(1) = 1$$

$$\frac{1}{|G|}\,\mathrm{Tr}\,\lambda(g) = \mathrm{tr}\,(g) = 0 \qquad \text{pour} \qquad g \in G\backslash\{1\}$$

$$\frac{1}{|G|}\,\mathrm{Tr}\,E = \frac{|H|}{|G|} = \frac{\mathrm{tr}\,(1)}{[G:H]}$$

$$\frac{1}{|G|}\,\mathrm{Tr}\,\lambda(g)E = \mathrm{tr}\,(g) = 0 \qquad \text{pour} \qquad g \in G\backslash\{1\}\,.$$

Par linéarité, on en déduit la propriété annoncée. La proposition 1 s'applique donc et permet de conclure. □

Le résultat ci-dessus est encore valable si $\mathbf{K}$ est de caractéristique p, pour autant que p ne divise pas $|G|$.

RÉFÉRENCES

[GHJ] Goodman, Frederick M., P. de la Harpe and V. Jones. Coxeter graphs and towers of algebras. A paraître dans *Mathematical Sciences Research Institute Publications*, Springer-Verlag.

[J01] Jones, V. Index for subfactors. *Inventiones Math. 72* (1983), 1-25.

[J02] —— Index for subrings of rings. *Contemp. Math. 45* (Am. Math. Soc. 1985), 181-190.

[Ka] Karoubi, M. *K-Theory*. Springer-Verlag, 1978.

[Sch] Scharlau, W. *Quadratic and Hermitian Forms*. Springer-Verlag, 1985.

[Se] Serre, J. P. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, 1978.

(Reçu le 16 mars 1989)

Hélène Dherte

Institut de Mathématique
Université Catholique de Louvain
2, chemin du Cyclotron
B-1348 Louvain-la-Neuve
(Belgique)