

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1989)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE THÉORÈME DE BURNSIDE SUR LE COMPTAGE DES ORBITES
ET QUELQUES APPLICATIONS
Autor: Sigrist, François
Kapitel: 4. L'indicateur des cycles
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-57367>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LEMME 3.3. Si G est résoluble, S en est l'unique sous-groupe d'ordre p .

Preuve. G contient alors un sous-groupe dérivé $G^{(k)}$, non trivial et commutatif. Celui-ci contient donc un unique sous-groupe S' d'ordre p , par le corollaire du lemme 3.1. De ce fait, S' est normal dans G , et unique puisque d'indice premier à p . Par conséquent $S = S'$.

Remarque. Voici le passage correspondant de la démonstration de Galois dans le mémoire cité (le groupe G de ce texte est bien sûr S):

... donc le groupe qui précède immédiatement le groupe G ne devra contenir que des substitutions telles que x_k, x_{ak+b} et ne contiendra pas, par conséquent, d'autre substitution circulaire que celle du groupe G .

On raisonnera sur ce groupe comme sur le précédent, et il s'ensuivra que le premier groupe dans l'ordre des décompositions, c'est-à-dire le groupe ACTUEL de l'équation ne peut contenir que des substitutions de la forme x_k, x_{ak+b} .

LEMME 3.4. Si S est normal dans G , G est résoluble.

Preuve. En numérotant convenablement les racines, on peut supposer que S est le sous-groupe T des translations du lemme 3.2. G est alors contenu dans le groupe A des affinités. C.Q.F.D.

Le chaînon manquant de la démonstration proprement dite est alors fourni par le théorème de Burnside. Grâce aux lemmes ci-dessus, il ne reste en effet qu'à invoquer la proposition 2.3: Si G agit de façon affine sur l'ensemble des racines, il ne peut contenir que $p - 1$ éléments d'ordre p , puisque ceux-ci sont sans point fixe. Le sous-groupe S est donc unique, et la preuve est complète.

Les équations de degré premier, solubles par radicaux, sont obligatoirement métacycliques par le corollaire du lemme 3.2. Dans la deuxième édition du livre de van der Waerden [8], le § 60 leur est consacré sous ce titre, reprenant l'argumentation de Galois. Dommage qu'il ne figure plus dans les éditions ultérieures.

4. L'INDICATEUR DES CYCLES

Une permutation de m objets est dite de type $(j_1, j_2, \dots, j_m)$ si sa décomposition en cycles disjoints comprend j_1 points fixes, j_2 transpositions, ..., et j_m m -cycles. On parle de même du type de l'élément $g \in G$, lorsque G agit sur un ensemble E à m objets. La fonction génératrice des types, introduite par Pòlya [6], s'appelle *indicateur des cycles*:

$$Z(G; z_1, z_2, \dots, z_m) = \frac{1}{|G|} \sum z_1^{j_1} z_2^{j_2} \dots z_m^{j_m}.$$

En l'absence d'une référence à un ensemble sur lequel G agit, on convient de considérer la représentation régulière du groupe G . Il faut remarquer que même dans ce cas, l'indicateur des cycles ne caractérise pas le groupe: prendre par exemple deux groupes non isomorphes d'ordre p^3 et d'exposant p premier impair [1, chapitre VIII].

L'indicateur des cycles pour le groupe des permutations de m objets Σ_m est connu sous forme implicite: c'est le coefficient de t^m dans le développement en série de la fonction $\exp(\sum(z_i t^i/i))$. En particulier:

$$Z(\Sigma_3; z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{6} (z_1^3 + 3z_1 z_2 + 2z_3).$$

Dans de nombreux problèmes d'énumération (frises, colliers, etc.), c'est l'action du groupe cyclique C_m et du groupe diédral D_m sur les m sommets d'un polygone régulier qui intervient. Les indicateurs des cycles sont dans ces cas donnés par:

$$Z(C_m; z_1, z_2, \dots, z_m) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \varphi(d) z_d^{m/d}$$

$$Z(D_{2s}; z_1, z_2, \dots, z_{2s}) = \frac{1}{4s} \sum_{d|2s} \varphi(d) z_d^{2s/d} + \frac{s}{2} z_1^2 z_2^{s-1} + \frac{s}{2} z_2^s$$

$$Z(D_{2s+1}; z_1, z_2, \dots, z_{2s+1}) = \frac{1}{4s+2} \sum_{d|2s+1} \varphi(d) z_d^{(2s+1)/d} + s z_1 z_2^s$$

Le théorème de Burnside peut s'exprimer à l'aide de l'indicateur des cycles, puisque le nombre de points fixes d'un élément g est égal à j_1 . Pour trouver le nombre d'orbites, il suffit en effet de calculer la dérivée partielle $\partial Z / \partial z_1$ au point $z_1 = z_2 = \dots = z_m = 1$.

5. LE THÉORÈME D'ÉNUMÉRATION DE PÔLYA

Dans l'article [6] intitulé « Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen », Pòlya décrit une méthode de dénombrement pour les configurations inéquivalentes par l'action d'un groupe de symétries. Conçu au départ pour compter les isomères d'une substance chimique de géométrie donnée, le procédé permet également de