

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1989)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HURWITZ-RADON MATRICES AND PERIODICITY MODULO 8
Autor: Eckmann, Beno
Kapitel: 5. Linearization
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-57365>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

5. LINEARIZATION

5.1. The groups E_s^U can be viewed, through the homomorphism $\phi: E_s^U \rightarrow \pi_s(U)$ in 3.1, as "linear homotopy groups" of U . This means that we consider maps of S^s into U via some $U(n)$ which are linear in the coordinates $x_0, x_1, \dots, x_s$ of $\mathbf{R}^{s+1} \supset S^s$; and linear nullhomotopies, i.e., extensions to $S^{s+1} \rightarrow U(n)$ linear in $x_0, x_1, \dots, x_{s+1}$. It is an immediate corollary of Theorem B that these linear homotopy groups $\pi_s^{\text{lin}}(U)$ are isomorphic to the $\pi_s(U)$ by the obvious imbedding $\pi_s^{\text{lin}}(U) \rightarrow \pi_s(U)$. In other words:

Any map $S^s \rightarrow U$ is homotopic to a linear map, and if a linear map $S^s \rightarrow U$ is nullhomotopic then it admits a linear nullhomotopy.

Similar statements hold, of course, for $\pi_s(O)$ and $\pi_s(Sp)$.

5.2. If these linearization phenomena could be established directly (by some approximation procedure) one would obtain a very transparent proof of the Bott periodicity theorems for $\pi_s(U)$, $\pi_s(O)$, and $\pi_s(Sp)$, in the sense that they would be reduced to the algebraic computation of E_s^U , E_s^O , and E_s^{Sp} as carried out here.

5.3. Linear maps $S^s \rightarrow U$ via $U(n)$, etc., are given explicitly in terms of HR-matrices; thus the coefficients involve $0, \pm 1, \pm i$ only. Such maps have a meaning over very general fields instead of $\mathbf{R}$ and $\mathbf{C}$, and one should compare the corresponding linear homotopy groups with homotopy groups defined by means of algebraic maps.

REFERENCES

- [E] ECKMANN, B. Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen. *Comment. Math. Helv.* 15 (1942/43), 358-366.
- [H] HURWITZ, A. Über die Komposition der quadratischen Formen. *Math. Ann.* 88 (1923), 1-25.
- [K] KAROUBI, M. *K-Theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1978.
- [LS] LAM, T. Y. and Tara SMITH. On the Clifford-Littlewood-Eckmann groups: A new look at periodicity mod 8. Preprint Berkeley 1988.
- [R] RADON, J. Lineare Scharen orthogonaler Matrizen. *Abh. Math. Sem. Hamburg* (1922), 1-14.

(Reçu le 15 décembre 1988)

Beno Eckmann

Mathematik
ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich