

## 2. Lemmes préliminaires

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\sum_{\varphi(n) \leq x} 1 = ax + O\left(\frac{x}{(\log x)^k}\right), \quad \text{pour tout } k > 0.$$

De façon précise, on conjecture que les mêmes principes appliqués à l'étude des quantités

$$S(x, k-1) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \frac{\log^{k-1}(x/\varphi(n))}{\varphi(n)} \quad \text{et} \quad L(x, k) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \log^k \varphi(n)$$

conduisent au résultat

$$L(x, k) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \log^k \varphi(n) = ax \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{k!}{(k-i)!} (\log x)^{k-i} + O_k(x).$$

Je remercie J.-L. Nicolas de m'avoir fourni le thème de l'étude, G. Robin de m'avoir aidé et M. Balazard pour de multiples remarques, notamment la forme améliorée du lemme F 1). J'exprime mes vifs remerciements au referee pour ses nombreuses et intéressantes suggestions.

## 2. LEMMES PRÉLIMINAIRES

On aura besoin des lemmes suivants, obtenus par voie élémentaire.

LEMME A ([8], [11]). *On a*

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = a \log x + a\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

LEMME B. *On a*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ p \nmid n}} \frac{1}{\varphi(n)} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1) + 1} \log x + O(1).$$

*Démonstration.* Il est prouvé dans [5] (Lemme 3.2 page 110) le résultat plus général

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, l) = 1}} \frac{1}{\varphi(n)} = \prod_{q \nmid l} \left(1 + \frac{1}{q(q-1)}\right) \frac{\varphi(l)}{l} \log x + O_l(1).$$

En posant  $l = p$  dans la preuve de ce résultat,  $O_l(1)$  s'explique alors de la façon suivante

$$O_p(1) = \frac{\log p}{p} + \frac{p-1}{p} O(1) = O(1),$$

où la constante impliquée par le symbole  $O$  est absolue. Le lemme B en résulte alors en observant que

$$\prod_{q \neq p} \left( 1 + \frac{1}{q(q-1)} \right) \frac{\varphi(p)}{p} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1) + 1}$$

LEMME C [2]. On a

$$\theta^*(x) =: \sum_{p \leq x} \log(p-1) = x + O\left(\frac{x}{\log^H x}\right), \quad \text{pour tout } H > 0.$$

*Remarque.* Le lemme C est l'une des formes équivalentes du théorème des nombres premiers avec reste. Notre résultat dépend directement des estimations élémentaires d'un tel reste, dont la première fut obtenue par E. Bombieri en 1962.

### 3. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

1<sup>re</sup> étape.

*Etude de la somme* 
$$S(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)}.$$

LEMME 1.1. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} = a \sum \frac{\log p}{p(p-1) + 1}.$$

*Démonstration.* Soit, pour  $s > 0$ , la série

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s \varphi(n)}.$$

Le théorème du produit eulérien donne

$$F(s) = \prod \left( 1 + \frac{1}{p^s(p-1)} \right).$$