

Section 4. Chern classes for locally finite groups

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

is commutative and as both δ 's are isomorphisms it suffices to show that

$$\delta^{-1} \circ c_1: \text{Hom}(G, \mathbf{C}^*) \rightarrow H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \text{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

is an isomorphism.

But by inspection $\delta^{-1} \circ c_1(\varphi) = \delta^{-1}(u) \circ \varphi$, and as u is a $\hat{\mathbf{Z}} = \text{End}_{\mathbf{Z}}(\mu_{\infty})$ generator for $H^2(\mu_{\infty}, \mathbf{Z}) \simeq \hat{\mathbf{Z}}$, $\delta^{-1}(u)$ is an isomorphism

$$\delta^{-1}(u): \mu_{\infty} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

SECTION 4. CHERN CLASSES FOR LOCALLY FINITE GROUPS

The definition will be based on the following two observations. In the following, let $G = \varinjlim G_k$ be a locally finite group where $\{G_k\}$ is a family of finite subgroups.

LEMMA. *Let*

$$\varphi: G \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbf{C})$$

be a representation of G . Then φ is uniquely determined by its restrictions

$$\varphi_k: G_k \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbf{C}).$$

Conversely given a family of compatible representations $\varphi_k: G_k \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbf{C})$, there exists a unique $\varphi: G \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbf{C})$ which restricts to φ_k for all k .

Proof. From the universal property of the direct limit, we have

$$\text{Hom}(G, \text{Gl}_n(\mathbf{C})) \cong \varprojlim \text{Hom}(G_k, \text{Gl}_n(\mathbf{C})).$$

PROPOSITION. *For all $i \geq 0$, the natural map*

$$H^i(G, \mathbf{Z}) \cong \varprojlim H^i(G_k, \mathbf{Z}).$$

is an isomorphism.

Proof. Obvious for $i = 0, 1$. For $i \geq 1$, the homology groups

$$H_i(G, \mathbf{Z}) = \varinjlim H_i(G_k, \mathbf{Z})$$

are all abelian torsion groups.

Now by the universal coefficient theorem ($i \geq 1$)

$$H^i(G, \mathbf{Z}) \cong \text{Ext}_{\mathbf{Z}}^1(H_{i-1}(G, \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$$

and as observed above, for $i \geq 2$, $H_{i-1}(G, \mathbf{Z})$ is torsion. Thus

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathbf{Z}}^1(H_{i-1}(G, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(H_{i-1}(G, \mathbf{Z}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\varinjlim H_{i-1}(G_k, \mathbf{Z}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \cong \varprojlim \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(H_{i-1}(G_k, \mathbf{Z}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ &\simeq \varprojlim \text{Ext}_{\mathbf{Z}}^1(H_{i-1}(G_k, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \cong \varprojlim H^i(G_k, \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

Combining these two results, there exists for a representation

$$\varphi: G \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbf{C})$$

of a locally finite group $G = \varinjlim G_k$ a unique cohomology class $c.(\varphi) \in H^{**}(G, \mathbf{Z})$ such that for all k

$$\text{res}_{G_k}^G(c.(\varphi)) = c.(\varphi_k)$$

Using this uniqueness result, it is easy to see that these classes satisfy the properties CH1, CH2 and CH3 and that they are uniquely determined by these properties.

REFERENCES

- [1] ATIYAH, M. F. Characters and cohomology of finite groups. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* 9 (1961), 2-64.
- [2] EVENS, L. On the Chern classes of representations of finite groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 115 (1965), 180-193.
- [3] EVENS, L. and D. KHAN. An integral Riemann-Roch formula for induced representations of finite groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 245 (1978), 309-330.
- [4] GREEN, J. A. The characters of the finite general linear groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 80 (1955), 402-447.
- [5] GROTHENDIECK, A. Classes de Chern des représentations linéaires des groupes discrets. In *Dix Exposés sur la Cohomologie étale des schémas*, North Holland, 1968.
- [6] KROLL, O. The cohomology of the finite general linear group. To appear in *J. Pure and Appl. Algebra*.
- [7] ——— An algebraic characterisation of Chern classes of finite group representations. *Bull. London Math. Soc.* 19 (1987), 245-248.