1. Quels sont les polygones qui pavent le plan?

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

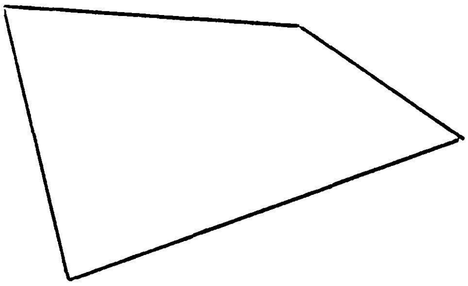
Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

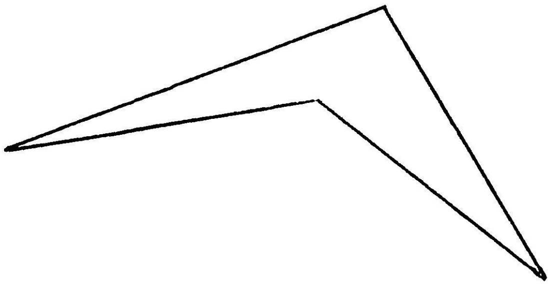
Le texte qui suit se divise en trois paragraphes: le premier introduit la notion de pavage, le second celle de périodicité, et le dernier fait allusion aux applications logiques et physiques.

1. Quels sont les polygones qui pavent le plan?

Considérons un polygone P à n côtés, représenté par une brique plate; ce polygone est dit *convexe* s'il n'a pas d'angle rentrant.



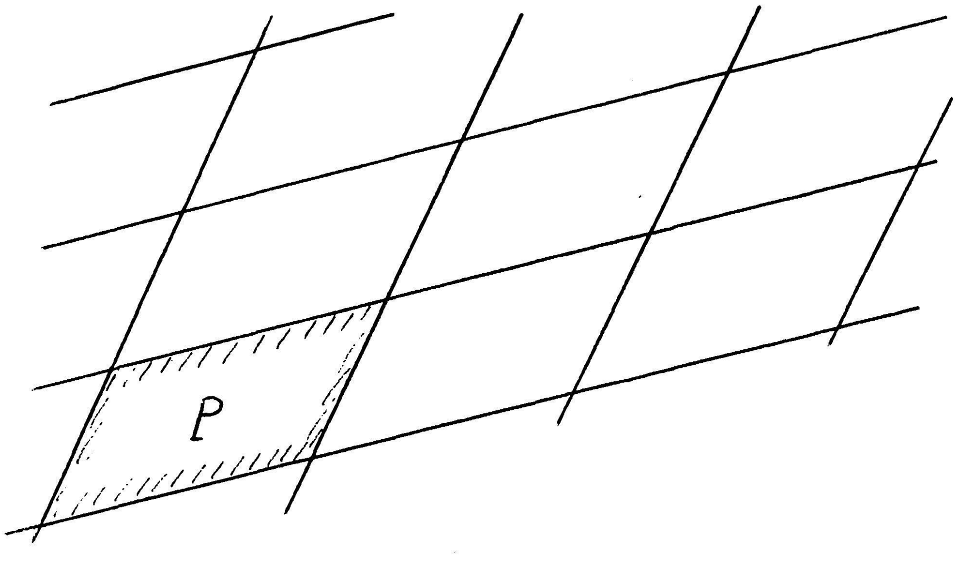
exemple convexe



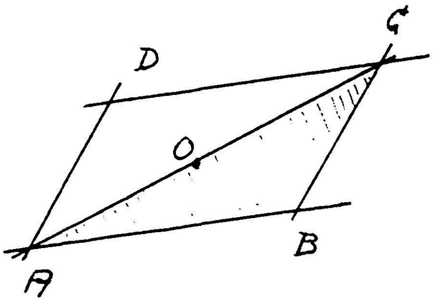
exemple non convexe

La question est de savoir quand et comment on peut recouvrir le plan tout entier sans trou ni chevauchement avec une famille de polygones égaux (= superposables) au modèle P. Autrement dit, imaginez une foultitude de carreleurs disposant d'un train chargé de briques toutes égales entre elles; quelles sont les conditions sur l'entier n, les n longueurs, et les n angles de P qui permettent aux carreleurs de paver Plainpalais? (On adopte ici le point de vue d'un carreleur pour qui Plainpalais serait un modèle de plan illimité.)

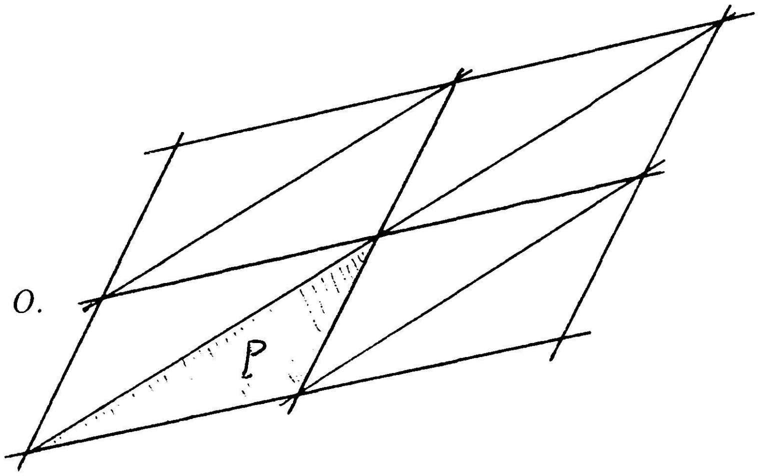
Il y a des cas particuliers à réponses immédiates, faciles ou connues. Par exemple, si $n = 4$ et si P est un parallélogramme, la réponse est oui



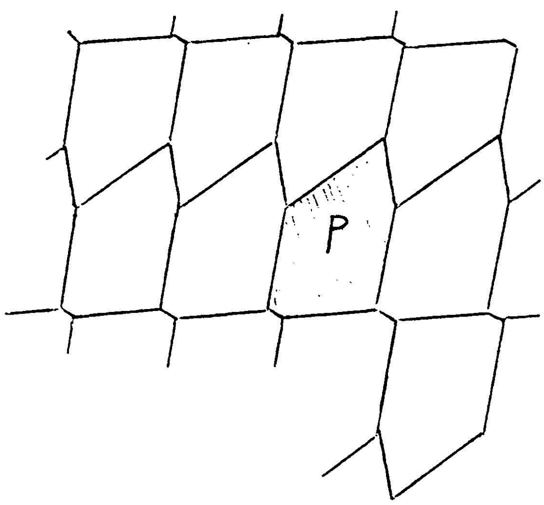
comme le suggère immédiatement un dessin. On dit qu'un parallélogramme *pave le plan.* Il en résulte que *tout triangle pave* aussi le plan, car deux copies d'un même triangle convenablement juxtaposées constituent un parallélogramme.



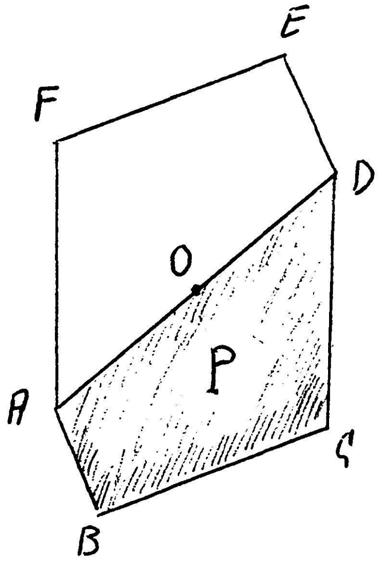
CDA est obtenu à partir de *ABC* par rotation d'un demi-tour centrée en *O*.



Il est aussi vrai que *tout quadrilatère pave* le plan, et on peut s'en assurer comme suit. On observe d'abord qu'un hexagone (polygone à 6 côtés) ayant une paire de côtés opposés parallèles et de même longueur pave le plan :



Ensuite, on remarque que deux copies d'un même quadrilatère convenablement juxtaposées constituent un tel hexagone (pour lequel les trois paires de côtés opposés satisfont la condition d'être parallèles et de même longueur) :

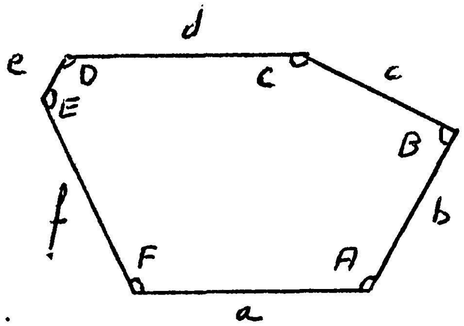


DEFA est obtenu à partir de *ABCD* par rotation d'un demi-tour centrée en *O*.

Ceci montre bien que tout quadrilatère (même non convexe) pave le plan.

Etant donné un hexagone convexe, on sait exactement quand il pave le plan. Le résultat date de la thèse d'un étudiant de D. Hilbert, du nom de K. Reinhardt (1918); reformulons-le comme suit (en rappelant que 2π désigne un angle de 360°):

THÉORÈME. *Un hexagone convexe* $P = ABCDEF$ *pave le plan si et seulement s'il est de l'un (au moins) des types suivants:*

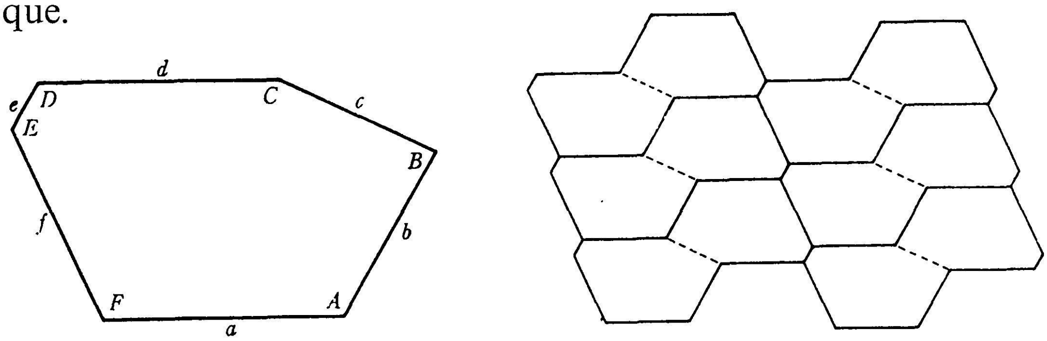


(1) $A + B + C = 2\pi, a = d$
(cas évoqué plus haut);

(2) $A + B + D = 2\pi,\ a = d,\ c = e$;

(3) $A = C = E = 2\pi/3,\ a = b,\ c = d,\ e = f$.

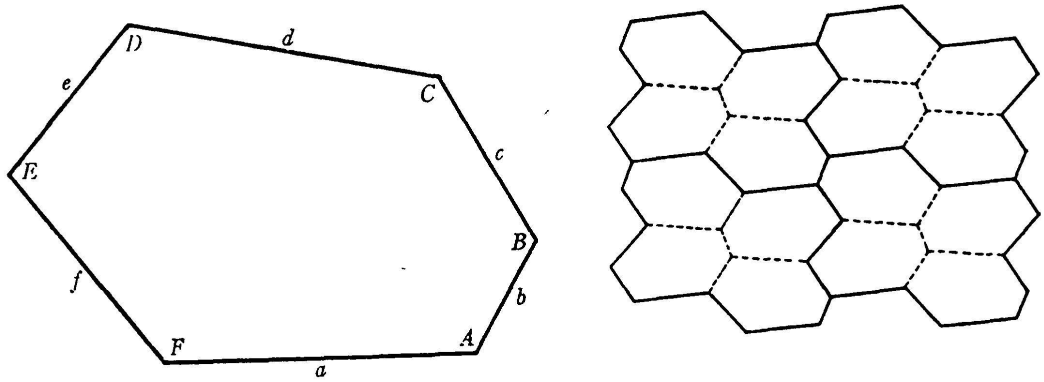
Les figures qui suivent proviennent d'un article de R. B. Kershner (1968), et devraient permettre au lecteur de se convaincre que les hexagones des types (1), (2) et (3) pavent le plan. Nous ne justifierons pas l'assertion réciproque.



(a) Un hexagone. (b) Partie du pavage.

FIGURE 1.

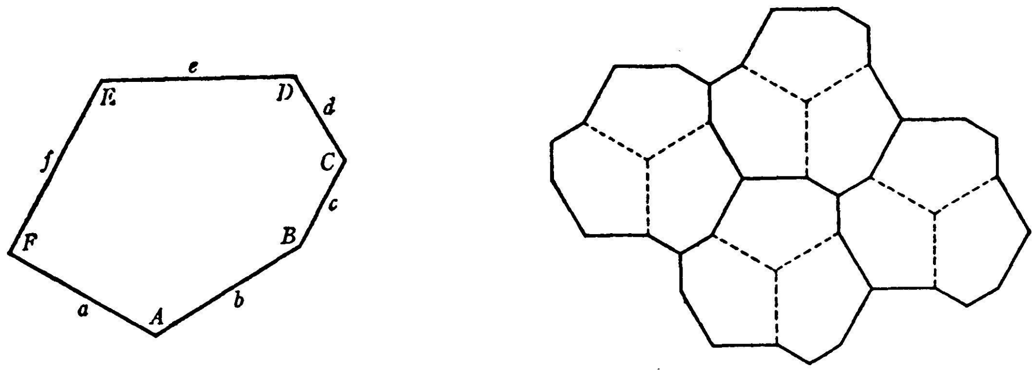
Hexagone de type 1; $A + B + C = 2\pi, a = d$.



(a) Un hexagone. (b) Partie du pavage.

FIGURE 2.

Hexagone de type 2; $A + B + D = 2\pi, a = d, c = e.$



(a) Un hexagone. (b) Partie du pavage.

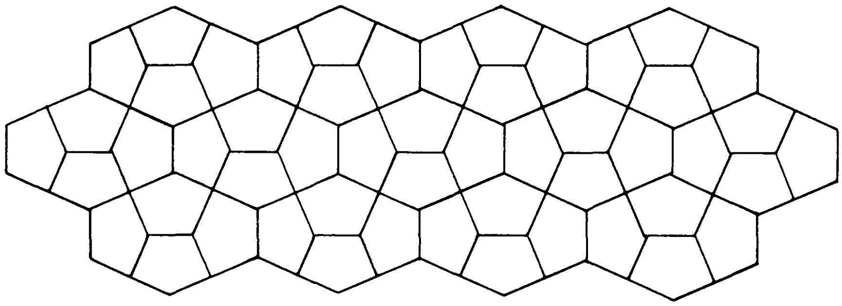
FIGURE 3.

Hexagone de type 3; $A = C = E = 2\pi/3, a = b, c = d, e = f$.

Au contraire, le cas des pentagones (5 côtés) n'est pas résolu.

PROBLÈME OUVERT : trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un pentagone convexe $ABCDE$ pave le plan.

On sait bien que certains pentagones ne pavent pas. Il en est ainsi des pentagones réguliers (5 côtés égaux et 5 angles égaux à $3\pi/5$). Notons que c'est sans doute Képler (1571-1630) qui le premier a montré cela, et plus généralement que les seuls polygones réguliers qui pavent le plan sont à 3, 4 ou 6 côtés; on vérifie expérimentalement ce résultat en contemplant les sols de nombreuses salles de bain. Il est d'autre part facile d'exhiber des pentagones qui pavent, et il paraît qu'on en voit même dans les rues du Caire :



Mais on n'a pas encore trouvé de critère général, comme pour les hexagones. Pour l'histoire rebondissante de ce problème (qui a passé pour être résolu entre 1968 et 1975 et qui a ensuite bénéficié des critiques et contributions de mathématiciens amateurs), voir les comptes rendus de D. Schattschneider.

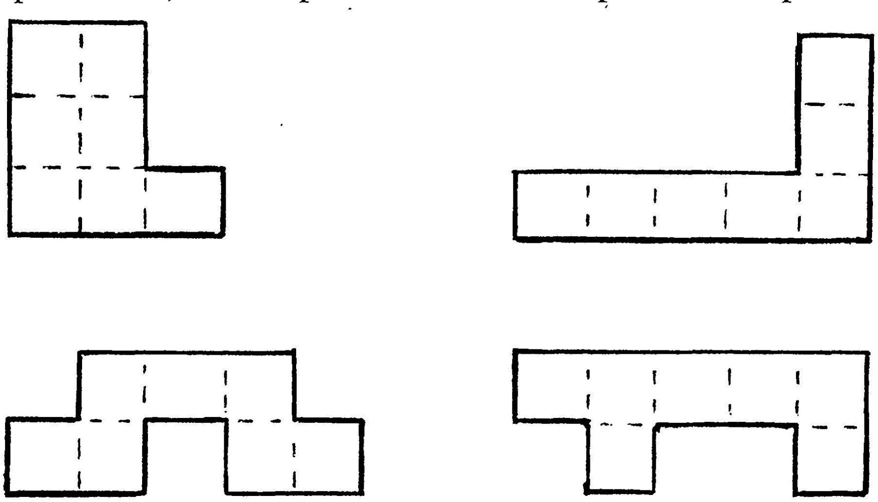
Le fait que le problème en discussion soit encore ouvert pour les pentagones est d'autant plus frappant qu'il est résolu pour tout polygone convexe à $n \neq 5$ côtés. Si $n = 3$, $n = 4$ ou $n = 6$: voir plus haut. Si $n \geqslant 7$, un polygone convexe à n côtés *ne pave jamais le plan.* On connaît des résultats beaucoup plus forts: soit $P_1, P_2, P_3, \ldots$ une suite de polygones convexes ayant respectivement $n_1, n_2, n_3, \ldots$ côtés, soumis aux conditions

(i) $n_j \geqslant 7$ pour $j = 1, 2, 3, \ldots$

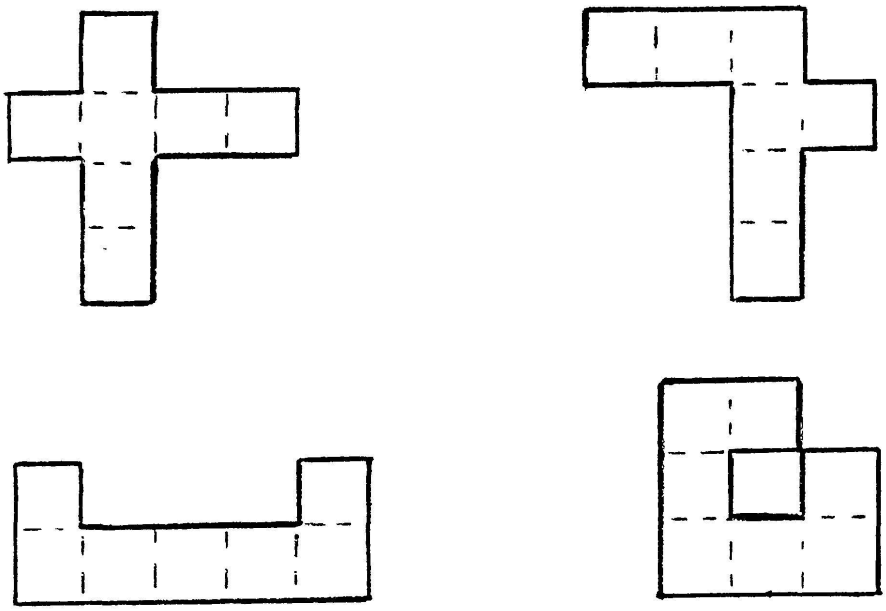
(ii) il existe deux constantes α, β telles que l'aire de P_j soit minorée par α et le périmètre de P_j soit majoré par β pour $j = 1, 2, 3, \ldots$

Alors il n'est pas possible de recouvrir avec des copies des P_j un domaine plan contenant un carré de côté $4\beta + 32\beta^3/\alpha$ (I. Niven, 1978). En particulier, avec une suite finie $P_1, P_2, \ldots, P_k$ vérifiant (i), il n'est jamais possible de paver le plan.

Pour n grand, on peut alors étendre le problème aux polygones non convexes à n côtés. Par exemple, J. H. Conway a étudié les *heptominos*; ce sont les figures obtenues en disposant l'un après l'autre 7 carrés égaux, tout carré devant avoir un côté commun avec l'un au moins des précédents. Il y a 108 espèces d'heptominos, dont précisément 104 pavent le plan:



4 des 104 heptominos qui pavent le plan (voir les deux puzzles résolus en fin d'article).



Les 4 heptominos qui ne pavent pas.

De même, il y a 369 octominos dont 343 pavent le plan. En revanche, le domino, les 2 triminos, les 5 quadriminos, les 12 pentominos et les 35 hexominos pavent tous le plan (Gardner, août 1975).

2. Périodicité

Une *généralisation naturelle* possible du problème discuté jusqu'ici se formule comme suit: soit $P_1, P_2, ..., P_k$ une famille (finie) de polygones plans, considérés comme briques modèles (on n'a plus nécessairement $k = 1$, et les polygones peuvent être non convexes). Existe-t-il un pavage du plan par des polygones dont chacun est superposable à l'un des modèles? Et si oui, quelles sont les propriétés des pavages possibles?

Avant de formuler des problèmes ouverts, évoquons à titre d'exemple une famille remarquable de tels pavages, pour chacun desquels on a $k = 2$ ou $k = 3$. Ce sont des pavages dits semi-réguliers: chaque tuile est un polygone régulier, deux tuiles qui se touchent ont en commun un sommet ou un côté entier, et les sommets du pavage « ont tous le même type ». C'est à nouveau Képler qui le premier a vu (montré?) que la figure suivante donne à changement d'échelle près tous les pavages semi-réguliers non réguliers. La figure est recopiée de (Grünbaum et Shephard, 1981).

On dit qu'un pavage est *périodique* s'il existe deux translations de directions distinctes qui transforment le pavage en lui-même.