4. Le groupe $H^2(G;A)$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

4. Le groupe $H^2(G;A)$

4.1. On reprend les hypothèses de 3.1. On se propose de démontrer l'existence d'un isomorphisme de groupes abéliens

$$\Phi : e(G;A) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z};A) .$$

Compte tenu de la définition des groupes $H^*(G;A)$ on obtient alors le résultat classique suivant.

4.2. Théorème. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$H^2(G;A) = e(G;A) .$$

4.3. On va construire l'application Φ.

Soit $[\xi] \in e(G;A)$ représentée par l'extension de groupes

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1 .$$

Notons F le $\mathbf{Z}G$-module libre engendré par l'ensemble $E\backslash\{1\}$; autrement dit $x \in F$ si et seulement si $x = \sum_{e \in E\backslash\{1\}} p_e e$, où $p_e \in \mathbf{Z}G$ et $p_e = 0$ pour presque tous les indices e. On fait la convention que $p_1\, 1 = 0$ dans F.

Soit L le sous-$\mathbf{Z}G$-module de F engendré par les éléments de F de la forme $e_1 e_2 - \mu(e_1) \cdot e_2 - e_1$ où $e_1, e_2 \in E$. On notera en particulier que les éléments de la forme $-\mu(e)e^{-1} - e$ et $-\mu(e^{-1}) \cdot e - e^{-1}$, où $e \in E$, sont dans L.

On pose $M = F/L$ et on note $\pi : F \to M$ la projection canonique.

4.4. On considère maintenant la suite de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0 .$$

Le morphisme ε est l'augmentation; on va définir les deux autres morphismes.

Pour tout $a \in A$ on pose $\alpha(a) = \pi(\lambda(a))$, mais il faut vérifier que α est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules. Soit $s : G \to E$ une section ensembliste de μ.

Pour tout $g \in G$ et $a \in A$ on a

$$\begin{aligned} \alpha(g \cdot a) - g \cdot \alpha(a) &= \pi\big(s(g)\lambda(a)s(g)^{-1} - g \cdot \lambda(a)\big) \\ &= \pi\big(\big(s(g)\lambda(a)s(g)^{-1} - \mu(s(g)\lambda(a))s(g)^{-1} \\ &\quad - s(g)\lambda(a)\big) + \big(s(g)\lambda(a) - \mu(s(g))\lambda(a) - s(g)\big) - \big(-\mu(s(g))s(g)^{-1} - s(g)\big)\big) = 0 . \end{aligned}$$

Enfin on définit un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\bar{\beta} : F \to \mathbf{Z}G$ en posant $\bar{\beta}(e) = \mu(e) - 1$ pour tout $e \in E$ puis en étendant $\mathbf{Z}G$-linéairement cette

application. On vérifie immédiatement que $\bar{\beta}(L) = 0$. On définit alors β par la condition $\beta\pi = \bar{\beta}$.

4.5. LEMME. *La suite* η *est exacte.*

Démonstration. On vérifie immédiatement que $\beta\alpha = 0$ et $\varepsilon\beta = 0$. On peut donc considérer η comme un complexe de $\mathbf{Z}G$-modules et pour démontrer son exactitude il suffit de construire une homotopie contractante

$$0 \to A \underset{\sigma_2}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} M \underset{\sigma_1}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} \mathbf{Z}G \underset{\sigma_0}{\overset{\varepsilon}{\rightleftarrows}} \mathbf{Z} \to 0 .$$

On définit σ_0 en posant $\sigma_0(1) = 1$.

Soit $s: G \to E$ une section ensembliste de μ telle que $s(1) = 1$; on définit σ_1 en posant $\sigma_1\left[\sum_{g\in G} n_g g\right] = \sum_{g\in G} n_g \pi(s(g))$. Maintenant pour tout $g \in G$ et $e \in E$ on a $\mu(s(g)es(g\mu(e))^{-1}) = 1$; on peut donc définir une application $h: G \times E \to A$ en posant

$$\lambda h(g\,;e) = s(g)es(g\mu(e))^{-1} .$$

On vérifie immédiatement à partir de cette définition que l'on a

$$h(g\,;e_1e_2) = h(g\mu(e_1)\,;e_2) + h(g\,;e_1) . \tag{4.5.1}$$

Comme tout élément $x \in F$ peut s'écrire $x = \sum_{(g\,;e)\in G\times(E\setminus\{1\})} n_{g,e}ge$ où $n_{g,e} \in \mathbf{Z}$ et $n_{g,e} = 0$ pour presque tous les indices $(g\,;e)$, on définit une application $\sigma: F \to A$ en posant $\sigma(x) = \sum_{(g\,;e)} n_{g,e}h(g\,;e)$.

De la relation (4.5.1) on déduit que $\sigma(L) = 0$; on peut donc définir σ_2 par la condition $\sigma_2\pi = \sigma$.

On vérifie sans peine que $\varepsilon\sigma_0 = 1_{\mathbf{Z}}$ et $\sigma_0\varepsilon + \beta\sigma_1 = 1_{\mathbf{Z}G}$.

Pour vérifier que $\sigma_1\beta + \alpha\sigma_2 = 1_M$ il suffit de vérifier que pour tout $g \in G$ et $e \in E\setminus\{1\}$ on a $(\sigma_1\beta+\alpha\sigma_2)\pi(ge) = \pi(ge)$. Or on a

$$\begin{aligned}
\sigma_1\beta\pi(ge) + \alpha\sigma_2\pi(ge) &= \sigma_1\bar{\beta}(ge) + \alpha h(g\,;e) \\
&= \sigma_1(g\bar{\beta}(e)) + \pi\lambda h(g\,;e) \\
&= \sigma_1(g\mu(e) - g) + \pi(s(g)es(g\mu(e))^{-1}) \\
&= \pi(s(g\mu(e)) - \pi(s(g)) + \pi(s(g)es(g\mu(e))^{-1}) \\
&= \pi(s(g)es(g\mu(e))^{-1} + s(g\mu(e)) - s(g) - ge) + \pi(ge)
\end{aligned}$$

$$= \pi((s(g)es(g\mu(e))^{-1} - \mu(s(g)e)s(g\mu(e))^{-1} - s(g)e) + (s(g)e - \mu(s(g))e - s(g)) - (-\mu(s(g\mu(e))s(g\mu(e))^{-1} - s(g\mu(e)))) + \pi(ge)$$
$$= \pi(ge) .$$

Finalement pour vérifier que $\sigma_2\alpha = 1_A$ il suffit de se rappeler que $s(1) = 1$.

4.6. Supposons que l'extension de groupes

$$\xi' : 0 \to A \xrightarrow{\lambda'} E' \xrightarrow{\mu'} G \to 1$$

est un autre représentant de $[\xi]$ et soit

$$\eta' : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{\beta'} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules qui lui est associée.

4.7. LEMME. *Les extensions* η *et* η' *sont équivalentes.*

Démonstration. Par hypothèse il existe un morphisme de groupes $\gamma : E \to E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & G & \to & 1 \\ & & 1_A \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow 1_G & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\lambda']{} & E' & \xrightarrow[\mu']{} & G & \to & 1 \end{array}$$

soit commutatif.

Il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\varphi : M \to M'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & 1_A \downarrow & & \varphi \downarrow & & 1_{\mathbf{Z}G} \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\alpha']{} & M' & \xrightarrow[\beta']{} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow[\varepsilon]{} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

On peut étendre l'application $\gamma : E \to E'$ en un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\bar{\gamma} : F \to F'$ et comme on a $\bar{\gamma}(L) \subset L'$, on définit φ par la condition $\varphi\pi = \pi'\bar{\gamma}$. On vérifie immédiatement que $\varphi\alpha = \alpha'$ et $\beta'\varphi = \beta$.

4.8. L'application Φ est alors donnée en posant $\Phi([\xi]) = [\eta]$.

4.9. On construit maintenant une application

$$\Psi : \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}; A) \to e(G; A) .$$

Soit $[\eta] \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}; A)$ représentée par une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Z} \to 0 .$$

Choisissons un élément $n \in N$ tel que $\gamma(n) = 1$ et une section ensembliste $\sigma : \mathrm{Im}\,\beta \to M$ de β. La dérivation $d_n \in \mathrm{Int}\,(G; N)$ vérifie la condition $\gamma d_n = 0$. On peut donc définir une application $u : G \to M$ en posant $u = \sigma d_n$; autrement dit pour tout $g \in G$ on a $\beta u(g) = g \cdot n - n$.

L'application u n'est pas une dérivation, cependant pour tous $g_1, g_2 \in G$ on a $g_1 \cdot u(g_2) + u(g_1) - u(g_1 g_2) \in \mathrm{Ker}\,\beta$. On définit alors une application $f : G \times G \to A$ en posant $\alpha f(g_1; g_2) = g_1 \cdot u(g_2) + u(g_1) - u(g_1 g_2)$.

Finalement considérons l'ensemble $E = A \times G$ muni de la loi de multiplication donnée par

$$(a_1; g_1)(a_2; g_2) = (a_1 + g_1 \cdot a_2 + f(g_1; g_2); g_1 g_2) .$$

4.10. Lemme. *E est un groupe.*

Démonstration. On a $\beta u(1) = 0$; donc il existe un unique élément $e \in A$ tel que $\alpha(e) = -u(1)$. On vérifie facilement que l'élément $(e; 1) \in E$ est neutre en remarquant que pour tout $g \in G$ on a $g \cdot e + f(g; 1) = 0$ et $e + f(1; g) = 0$.

Maintenant pour tout $g \in G$ on a $\beta(g \cdot u(g^{-1}) + u(g)) = 0$; on peut donc définir une application $h : G \to A$ en posant

$$\alpha h(g) = g \cdot u(g^{-1}) + u(g) .$$

On vérifie cette fois que l'élément $(-g^{-1} \cdot a - g^{-1} \cdot h(g); g^{-1}) \in E$ est l'inverse de l'élément $(a; g) \in E$ en remarquant que pour tout $g \in G$ on a $f(g; g^{-1}) - h(g) = e$ et $f(g^{-1}; g) - g^{-1} \cdot h(g) = e$.

Enfin pour vérifier l'associativité de la loi de multiplication, il suffit de remarquer que pour tous $g_1, g_2, g_3 \in G$ on a

$$f(g_1; g_2) + f(g_1 g_2; g_3) - g_1 \cdot f(g_2; g_3) - f(g_1; g_2 g_3) = 0 .$$

4.11. Considérons la suite de groupes

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1 .$$

Puisque $e + f(1; 1) = 0$, l'application λ définie en posant $\lambda(a) = (a + e; 1)$ est un morphisme de groupes. D'autre part il est immédiat que l'application μ, définie en posant $\mu(a; g) = g$, est un morphisme de groupes.

4.12. LEMME. *ξ est une extension de groupes telle que l'action de G sur A induite par l'extension est égale à l'action donnée de G sur A.*

Démonstration. Il est immédiat que la suite est exacte.
L'action de G sur A induite par l'extension est donnée par

$$\begin{aligned}\lambda(\theta(g)(a)) &= (0;g)\lambda(a)(0;g)^{-1}\\ &= (g\cdot a+g\cdot e+f(g;1)-h(g)+f(g;g^{-1});gg^{-1})\\ &= (g\cdot a+e-e+g\cdot e+f(g;1)-h(g)+f(g;g^{-1});1)\\ &= (g\cdot a+e;1)\\ &= \lambda(g\cdot a)\end{aligned}$$

car $-e+g\cdot e+f(g;1)-h(g)+f(g;g^{-1})=0$ pour tout $g\in G$.

4.13. On notera avec un $'$ les différents éléments de la construction précédente obtenus à partir du choix d'un élément $n'\in N$ tel que $\gamma(n')=1$ et d'une section ensembliste σ': Im $\beta\to M$ de β.

4.14. LEMME. *Les extensions ξ et ξ' sont équivalentes.*

Démonstration. Il faut construire un morphisme de groupes $\delta: E\to E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & G & \to & 1\\ & & 1_A\downarrow & & \delta\downarrow & & \downarrow 1_G & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\lambda']{} & E' & \xrightarrow[\mu']{} & G & \to & 1 \end{array}$$

soit commutatif.

Comme on a $\gamma(n-n')=0$ on peut trouver un élément $m\in M$ tel que $\beta(m)=n-n'$.

Maintenant pour tout $g\in G$ on a $\beta(u(g)-u'(g)-g\cdot m+m)=0$; on peut donc définir une application $k: G\to A$ en posant

$$\alpha k(g) = u(g)-u'(g)-g\cdot m+m\,.$$

Par calcul direct on vérifie que pour tout $g_1, g_2\in G$ on a

$$(f-f')(g_1;g_2) = g_1\cdot k(g_2)+k(g_1)-k(g_1g_2)\,. \tag{4.14.1}$$

On définit alors δ en posant

$$\delta(a;g) = (a+k(g);g)$$

et en utilisant la relation (4.14.1) on voit que δ est un morphisme de groupes.

On a $\delta\lambda = \lambda'$ car $e' = e + k(1)$; enfin il est immédiat que $\mu'\delta = \mu$.

4.15. On notera maintenant avec une $-$ les différents éléments de la construction précédente obtenus à partir du choix d'une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\bar{\eta}: 0 \to A \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{M} \xrightarrow{\bar{\beta}} \bar{N} \xrightarrow{\bar{\gamma}} \mathbf{Z} \to 0$$

représentant $[\eta]$.

4.16. LEMME. Les extensions ξ et $\bar{\xi}$ sont équivalentes.

Démonstration. Il suffit de vérifier que s'il existe des morphismes de $\mathbf{Z}G$-modules φ et ψ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & N & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{Z} \to 0 \\ & & 1_A \downarrow & & \varphi \downarrow & & \psi \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\bar{\alpha}]{} & \bar{M} & \xrightarrow[\bar{\beta}]{} & \bar{N} & \xrightarrow[\bar{\gamma}]{} & \mathbf{Z} \to 0 \end{array}$$

soit commutatif, alors il existe un morphisme de groupes $\delta: E \to \bar{E}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & G & \to & 1 \\ & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_G & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\bar{\lambda}]{} & \bar{E} & \xrightarrow[\bar{\mu}]{} & G & \to & 1 \end{array}$$

soit commutatif.

Comme on a $\bar{\gamma}(\psi(n) - \bar{n}) = 0$ on peut trouver un élément $\bar{m} \in \bar{M}$ tel que $\bar{\beta}(\bar{m}) = \psi(n) - \bar{n}$.

Maintenant pour tout $g \in G$ on a $\bar{\beta}(\varphi u(g) - \bar{u}(g) - g \cdot \bar{m} + \bar{m}) = 0$; on peut donc définir une application $k: G \to A$ en posant

$$\bar{\alpha}k(g) = \varphi u(g) - \bar{u}(g) - g \cdot \bar{m} + \bar{m}\,.$$

Par calcul direct on vérifie que pour tout $g_1, g_2 \in G$ on a

$$(f - \bar{f})(g_1; g_2) = g_1 \cdot k(g_2) + k(g_1) - k(g_1 g_2)\,. \tag{4.16.1}$$

On définit alors δ en posant

$$\delta(a; g) = (a + k(g); g)$$

et en utilisant la relation (4.16.1) on voit que δ est un morphisme de groupes.

On a $\delta\lambda = \bar{\lambda}$ car $\bar{e} = e + k(1)$; enfin il est immédiat que $\bar{\mu}\delta = \mu$.

4.17. On peut donc définir l'application Ψ en posant $\Psi([\eta]) = [\xi]$, et il faut vérifier que Ψ est la réciproque de Φ.

4.18. LEMME. $\Psi\Phi = 1_{e(G;A)}$.

Démonstration. Si $[\xi] \in e(G;A)$ est représentée par l'extension de groupes

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1$$

alors $\Psi\Phi([\xi]) = \Psi([\eta]) = [\xi']$ où η est l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 1$$

définie aux n^{os} 4.3 et 4.4, et ξ' est l'extension de groupes

$$0 \to A \xrightarrow{\lambda'} E' \xrightarrow{\mu'} G \to 1$$

qu'on va obtenir en appliquant la construction des n^{os} 4.9, 4.10 et 4.11.

On peut choisir l'élément $n = 1 \in \mathbf{Z}G$ et définir l'application $u : G \to M$ en composant les applications du diagramme

$$G \xrightarrow{\tau} E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} M,$$

où τ est une section ensembliste de μ telle que $\tau(1) = 1$ et i est l'inclusion évidente, car pour tout $g \in G$ on a

$$\beta u(g) = \beta\pi i\tau(g) = \bar{\beta}\tau(g) = \mu\tau(g) - 1 = g - 1.$$

L'application $f : G \times G \to A$ qui permet de définir la multiplication du groupe $E' = A \times G$ satisfait donc la condition

$$\alpha f(g_1 ; g_2) = \pi\big(g_1 \cdot \tau(g_2) + \tau(g_1) - \tau(g_1 g_2)\big). \tag{4.18.1}$$

De plus comme $i(1) = 0$ dans F on a $u(1) = 0$ donc $(0;1)$ est l'élément neutre de E' et le morphisme λ' est donné par $\lambda'(a) = (a;1)$.

Maintenant pour tous $g_1, g_2 \in G$ on a

$$\lambda f(g_1 ; g_2) = \tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1 g_2)^{-1}. \tag{4.18.2}$$

En effet comme $\mu\big(\tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1 g_2)^{-1}\big) = 1$ on peut définir une application $\bar{f} : G \times G \to A$ en posant $\lambda\bar{f}(g_1 ; g_2) = \tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1 g_2)^{-1}$, et en tenant compte de (4.18.1) et de la définition de α dans 4.4 on a

$$\begin{aligned}
\alpha\big(\bar{f}(g_1 ; g_2) - f(g_1 ; g_2)\big) &= \pi\lambda\bar{f}(g_1 ; g_2) - \alpha f(g_1 ; g_2) \\
&= \pi\big(\tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1 g_2)^{-1} - g_1\tau(g_2) - \tau(g_1) + \tau(g_1 g_2)\big) \\
&= \pi\big(\big(\tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1 g_2)^{-1} - \mu\big(\tau(g_1)\tau(g_2)\big)\tau(g_1 g_2)^{-1} - \tau(g_1)\tau(g_2)\big)
\end{aligned}$$

$$+ (\tau(g_1)\tau(g_2) - \mu(\tau(g_1))\tau(g_2) - \tau(g_1)) - (-\mu(\tau(g_1 g_2))\tau(g_1 g_2)^{-1} - \tau(g_1 g_2))) = 0 .$$

Finalement pour montrer que les extensions de groupes ξ' et ξ sont équivalentes, il faut construire un morphisme de groupes $\delta : E' \to E$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda'} & E' & \xrightarrow{\mu'} & G & \to & 1 \\ & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_G & & \\ 0 & \to & A & \underset{\lambda}{\to} & E & \underset{\mu}{\to} & G & \to & 1 \end{array}$$

soit commutatif.

On pose $\delta(a\,;g) = \lambda(a)\tau(g)$.

En utilisant la formule (4.18.2) on vérifie facilement que δ est un morphisme de groupes.

On a $\delta\lambda' = \lambda$ car $\tau(1) = 1$ et il est immédiat que $\mu\delta = \mu'$.

4.19. LEMME. $\Phi\Psi = 1_{\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)}$.

Démonstration. Si $[\eta] \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ est représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Z} \to 0$$

alors $\Phi\Psi([\eta]) = \Phi([\xi]) = [\eta']$ où ξ est l'extension de groupes

$$0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1$$

définie aux n^{os} 4.9, 4.10 et 4.11 et η' est l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{\beta'} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

définie aux n^{os} 4.3 et 4.4.

Pour montrer que les extensions de $\mathbf{Z}G$-modules η' et η sont équivalentes il faut construire des morphismes de $\mathbf{Z}G$-modules $\varphi : M' \to M$ et $\psi : \mathbf{Z}G \to N$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha'} & M' & \xrightarrow{\beta'} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} \to 0 \\ & & 1_A \downarrow & & \varphi \downarrow & & \psi \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} \\ 0 & \to & A & \underset{\alpha}{\to} & M & \underset{\beta}{\to} & N & \underset{\gamma}{\to} & \mathbf{Z} \to 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Soit F' le $\mathbf{Z}G$-module libre engendré par l'ensemble $(A \times G)\backslash\{(e\,;1)\}$ sous-jacent au groupe E et soit $\pi' : F' \to M'$ la projection canonique. Soit

encore $u: G \to M$ l'application définie au n° 4.9. En posant $\bar{\varphi}(a\,;g) = \alpha(a)+u(g)$ et en étendant $\mathbf{Z}G$-linéairement cette définition on obtient un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\bar{\varphi}: F' \to M$ tel que pour tout $(a_1\,;g_1), (a_2\,;g_2) \in E$ on a

$$\bar{\varphi}\big((a_1\,;g_1)\,(a_2\,;g_2)-\mu(a_1\,;g_1)\cdot(a_2\,;g_2)-(a_1\,;g_1)\big) = 0$$

Il existe donc un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\varphi: M' \to M$ tel que $\varphi\pi' = \bar{\varphi}$.

Maintenant en posant $\psi(g) = g \cdot n$, où $n \in N$ est l'élément choisi dans la construction de η, et en étendant $\mathbf{Z}$-linéairement cette définition on obtient un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\psi: \mathbf{Z}G \to N$.

On vérifie immédiatement que $\varphi\alpha' = \alpha$, $\beta\varphi = \psi\beta'$ et $\gamma\psi = \varepsilon$.

4.20. Il reste à montrer que l'application Ψ est un morphisme de groupes abéliens.

Soit $[\eta_i] \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ $(i=1,2)$ représentée pour la 2-extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta_i:\ 0 \to A \xrightarrow{\alpha_i} M_i \xrightarrow{\beta_i} N_i \xrightarrow{\gamma_i} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

On choisit un élément $n_i \in N_i$ tel que $\gamma_i(n_i) = 1$. Si $u_i: G \to M_i$ est donnée par la condition $\beta_i u_i(g) = g \cdot n_i - n_i$, on définit $f_i: G \times G \to A$ par la condition $\alpha_i f_i(g_1\,;g_2) = u_i(g_1) + g_1 \cdot u_i(g_2) - u_i(g_1g_2)$. On pose $E_i = A \times G$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par f_i.

Alors à l'extension η_i est associée l'extension de groupes

$$\xi_i:\ 0 \to A \xrightarrow{\lambda_i} E_i \xrightarrow{\mu_i} G \to 1$$

où $\lambda_i(a) = (a+e_i\,;1)$, avec $\alpha_i(e_i) = -u_i(1)$, et $\mu_i(a\,;g) = g$.

4.21. La somme $[\eta_1] + [\eta_2] = [\nabla(\eta_1 \oplus \eta_2)\Delta]$ est définie par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{lccccccccc}
\eta_1 \oplus \eta_2 & : 0 \to & A \oplus A & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & M_1 \oplus M_2 & \xrightarrow{\bar{\beta}} & N_1 \oplus N_2 & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & \to 0 \\
 & & 1_{A\oplus A}\uparrow & & 1_{M_1\oplus M_2}\uparrow & & \varphi\uparrow & & \uparrow\Delta & \\
(\eta_1\oplus\eta_2)\Delta & : 0 \to & A \oplus A & \xrightarrow[\bar{\alpha}]{} & M_1 \oplus M_2 & \xrightarrow[\beta_0]{} & N & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbf{Z} & \to 0 \\
 & & \nabla\downarrow & & \psi\downarrow & & 1_N\downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & \\
\nabla(\eta_1\oplus\eta_2)\Delta : & 0 \to & A & \xrightarrow[\alpha]{} & M & \xrightarrow[\beta]{} & N & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbf{Z} & \to 0
\end{array}$$

où $\bar{\alpha} = \alpha_1 \oplus \alpha_2$, $\bar{\beta} = \beta_1 \oplus \beta_2$, $\bar{\gamma} = \gamma_1 \oplus \gamma_2$, N est le produit fibré de γ et Δ et M est le produit cofibré de $\bar{\alpha}$ et ∇.

4.22. Soit H un groupe. On voit immédiatement que la construction des n^{os} 4.9, 4.10 et 4.11 se généralise en une correspondance entre les 2-extensions d'un $\mathbf{Z}H$-module M par un anneau unitaire commutatif Z sur lequel H agit trivialement, et les extensions de groupes de M par H.

En particulier si on considère $\eta_1 \oplus \eta_2$ comme une 2-extension de $\mathbf{Z}[G \times G]$-modules de $A \oplus A$ par $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, on peut lui associer l'extension de groupes

$$\bar{\xi}\colon 0 \to A \times A \xrightarrow{\bar{\lambda}} \bar{E} \xrightarrow{\bar{\mu}} G \times G \to 1$$

définie de la façon suivante:

L'élément $\bar{n} = (n_1 ; n_2) \in N_1 \oplus N_2$ satisfait $\bar{\gamma}(\bar{n}) = (1 ; 1)$, donc si on pose $\bar{u} = u_1 \oplus u_2 \colon G \times G \to M_1 \oplus M_2$ on a $\bar{\beta}\bar{u}(g ; h) = (g ; h) \cdot \bar{n} - \bar{n}$. On peut alors définir $\bar{f}\colon (G \times G) \times (G \times G) \to A \times A$ par la condition

$$\bar{\alpha}\bar{f}\big((g_1 ; h_1) ; (g_2 ; h_2)\big) = \bar{u}(g_1 ; h_1) + (g_1 ; h_1) \cdot \bar{u}(g_2 ; h_2) - \bar{u}(g_1 g_2 ; h_1 h_2)\,.$$

On vérifie facilement qu'on a la relation

$$\bar{f}\big((g_1 ; h_1) ; (g_2 ; h_2)\big) = \big(f_1(g_1 ; g_2) ; f_2(h_1 ; h_2)\big)\,. \tag{4.22.1}$$

On pose $\bar{E} = (A \times A) \times (G \times G)$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par $\bar{f}$.

On a $\bar{\lambda}(a ; b) = \big((a ; b) + \bar{e} ; (1 ; 1)\big)$, où $\bar{e} = (e_1 ; e_2)$, et $\bar{\mu}\big((a ; b) ; (g ; h)\big) = (g ; h)$.

4.23. Lemme. *Les extensions de groupes $\xi_1 \times \xi_2$ et $\bar{\xi}$ sont équivalentes.*

Démonstration. Compte tenu de la formule (4.22.1) l'application $\delta\colon \bar{E} \to E_1 \times E_2$, définie en posant

$$\delta\big((a ; b) ; (g ; h)\big) = \big((a ; g) ; (b ; h)\big)\,,$$

est un morphisme de groupes tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bar{\xi} & : & 0 & \to & A \times A & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \bar{E} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & G \times G \to 1 \\
 & & & & 1_{A\times A}\downarrow & & \delta\downarrow & & \downarrow 1_{G\times G} \\
\xi_1 \times \xi_2 & : & 0 & \to & A \times A & \xrightarrow[\lambda_1 \times \lambda_2]{} & E_1 \times E_2 & \xrightarrow[\mu_1 \times \mu_2]{} & G \times G \to 1
\end{array}$$

soit commutatif.

4.24. Maintenant à la 2-extension de $\mathbf{Z}G$-modules $(\eta_1 \oplus \eta_2)\Delta$ on associe l'extension de groupes

$$\xi_0 : 0 \to A \times A \xrightarrow{\lambda_0} E_0 \xrightarrow{\mu_0} G \to 1$$

définie de la façon suivante.

Comme $\bar{\gamma}(\bar{n}) = \Delta(1)$ l'élément $n = (\bar{n}; 1) \in N$ et satisfait $\gamma(n) = 1$; donc si on pose $u_0 = u_1 \oplus u_2 : G \to M_1 \oplus M_2$ on a $\beta_0 u_0(g) = g \cdot n - n$. On peut alors définir $f_0 : G \times G \to A \times A$ par la condition

$$\bar{\alpha} f_0(g_1 ; g_2) = u_0(g_1) + g_1 \cdot u_0(g_2) - u_0(g_1 g_2) .$$

On vérifie facilement qu'on a la relation

$$f_0(g_1 ; g_2) = \big(f_1(g_1 ; g_2) ; f_2(g_1 ; g_2)\big) . \tag{4.24.1}$$

On pose $E_0 = (A \times A) \times G$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par f_0.

On a $\lambda_0(a ; b) = \big((a ; b) + \bar{e} ; 1\big)$ et $\mu_0\big((a ; b) ; g\big) = g$.

4.25. LEMME. *Les extensions de groupes* $\bar{\xi}\Delta$ *et* ξ_0 *sont équivalentes.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bar{\xi} & : 0 & \to & A \times A & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \bar{E} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & G \times G & \to 1 \\
 & & & 1_{A \times A} \uparrow & & \omega \uparrow & & \uparrow \Delta & \\
\bar{\xi}\Delta & : 0 & \to & A \times A & \underset{\bar{\lambda}'}{\rightrightarrows} & \bar{E}' & \underset{\bar{\mu}'}{\rightarrow} & G & \to 1
\end{array}$$

où $\bar{E}'$ est le produit fibré de $\bar{\mu}$ et Δ; donc un élément de $\bar{E}'$ est de la forme $\big((a ; b) ; (g ; g) ; g\big)$.

Compte tenu de la formule (4.24.1) l'application $\delta : \bar{E}' \to E_0$, définie en posant

$$\delta\big((a ; b) ; (g ; g) ; g\big) = \big((a ; b) ; g\big) ,$$

est un morphisme de groupes tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bar{\xi}\Delta & : 0 & \to & A \times A & \xrightarrow{\bar{\lambda}'} & \bar{E}' & \xrightarrow{\bar{\mu}'} & G & \to 1 \\
 & & & 1_{A \times A} \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_G & \\
\xi_0 & : 0 & \to & A \times A & \underset{\lambda_0}{\rightarrow} & E_0 & \underset{\mu_0}{\rightarrow} & G & \to 1
\end{array}$$

soit commutatif.

4.26. Finalement à la 2-extension de $\mathbf{Z}G$-modules $\nabla((\eta_1 \oplus \eta_2)\Delta)$ on associe l'extension de groupes

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1$$

définie de la façon suivante.

Si on pose $u = \psi u_0 : G \to M$ on a $\beta u(g) = g \cdot n - n$, donc on peut définir $f : G \times G \to A$ par la condition

$$\alpha f(g_1 ; g_2) = u(g_1) + g_1 \cdot u(g_2) - u(g_1 g_2) .$$

On vérifie facilement qu'on a la relation

$$f(g_1 ; g_2) = f_1(g_1 ; g_2) + f_2(g_1 ; g_2) . \tag{4.26.1}$$

On pose $E = A \times G$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par f.

On a $\lambda(a) = (a + \nabla\bar{e} ; 1)$ et $\mu(a ; g) = g$.

4.27. LEMME. *Les extensions de groupes* $\nabla\xi_0$ *et* ξ *sont équivalentes.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xi_0 & : 0 & \to & A \times A & \xrightarrow{\lambda_0} & E_0 & \xrightarrow{\mu_0} & G & \to 1 \\
 & & & \nabla \downarrow & & \omega_0 \downarrow & & \downarrow 1_G & \\
\nabla\xi_0 & : 0 & \to & A & \underset{\lambda'_0}{\to} & E'_0 & \underset{\mu'_0}{\to} & G & \to 1
\end{array}$$

où E'_0 est le produit cofibré de λ_0 et ∇.

Compte tenu de la formule (4.26.1) l'application $\omega : E_0 \to E$, définie en posant $\omega((a ; b) ; g) = (\nabla(a ; b) ; g)$, est un morphisme de groupes tel que $\omega\lambda_0 = \lambda\nabla$ et $\mu\omega = \mu_0$. D'après la propriété universelle du produit cofibré il existe donc un morphisme de groupe $\delta : E'_0 \to E$ tel que $\delta\lambda'_0 = \lambda$ et $\delta\omega_0 = \omega$.

On peut donc considérer le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\nabla\xi_0 & : 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda'_0} & E'_0 & \xrightarrow{\mu'_0} & G & \to 1 \\
 & & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_G & \\
\xi & : 0 & \to & A & \underset{\lambda}{\to} & E & \underset{\mu}{\to} & G & \to 1
\end{array}$$

dans lequel le premier carré est commutatif. Le deuxième carré est aussi commutatif car on a $\mu\delta\omega_0 = \mu'_0\omega_0$ et ω_0 est surjectif car ∇ est surjectif.

4.28. La relation d'équivalence entre extensions étant stable vis-à-vis des produits fibrés et cofibrés, les résultats précédents donnent

$$\Psi([\eta_1]) + \Psi([\eta_2]) = [\nabla(\xi_1 \times \xi_2)\Delta] = [\nabla\bar{\xi}\Delta]$$
$$= [\nabla\xi_0] = [\xi] = \Psi([\nabla(\eta_1 \oplus \eta_2)\Delta]) = \Psi([\eta_1]+[\eta_2]).$$

(Reçu le 8 juillet 1987)

Pierre-Paul Grivel

Université de Genève
Section de mathématiques
Rue du Lièvre 2-4
CH — 1211 Genève 24

vide-leer-empty