§3. Ce que l'on espère sur le comportement de h(—d)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

distincts) associe $(-1)^r$, *on a* $\lambda(n) = \chi(n)$ *pour la plupart des petits nombres entiers* n. *La fonction* $\zeta_K(s)$ *doit ressembler à la fonction* $\zeta(2s)$.

Ces énoncés sont volontairement vagues. Les rendre précis est souvent le nœud des démonstrations de minorations de $h(-d)$ lorsque d tend vers ∞.

§ 3. Ce que l'on espère sur le comportement de $h(-d)$

On peut montrer que *en moyenne* (en un sens qui demande à être précisé, ce que je ne ferai pas ici), $h(-d)$ est équivalent à une constante non nulle fois $\sqrt{d}$; déjà Gauss connaissait ce type de résultat [1]).

Il n'est pas vrai par contre que $h(-d)/\sqrt{d}$ admette un minorant > 0 ou un majorant lorsque d tend vers $+\infty$: on sait par exemple que $h(-d)/(\sqrt{d} \log \log d)$ ne tend pas vers 0 et que $h(-d) \log \log d/\sqrt{d}$ ne tend pas vers $+\infty$ lorsque d tend vers $+\infty$.

On obtient cependant de façon élémentaire des *majorations* raisonnables de $h(-d)$ (raisonnable signifiant avec l'exposant $\frac{1}{2}$ que l'on attend pour d), de la forme $h(-d) \leqslant C\sqrt{d} \log d$. Par exemple:

Proposition. *On a pour* $d > 4$

$$h(-d) \leqslant \pi^{-1}\sqrt{d} \log d \,. \tag{27}$$

Compte tenu de (24) et (26), il revient au même de montrer que l'on a, en posant $\chi(n) = \left(\frac{-d}{n}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/n \leqslant \log d \,.$$

Or, pour tout nombre réel $x > 0$, la somme $M(x) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n)$ est majorée par $N(x) = \inf([x], [(d-1)/2])$, et l'on a donc, en intégrant par parties

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} = \int_{1^-}^{\infty} \frac{dM(x)}{x} = \int_{1}^{\infty} \frac{M(x)}{x^2} dx \leqslant \int_{1}^{\infty} \frac{N(x)}{x^2} dx$$
$$= \int_{1^-}^{\infty} \frac{dN(x)}{x} = \sum_{n \leqslant [(d-1)/2]} 1/n \leqslant \log d \,.$$

---

[1]) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 302.

Il est possible d'obtenir des *minorations* raisonnables de $h(-d)$ *si l'on admet l'hypothèse de Riemann généralisée.* Ainsi par exemple, en suivant une démonstration de Hecke, publiée par Landau [1]), on obtient:

PROPOSITION. *Si la fonction zêta* ζ_K *du corps* $K = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}i\sqrt{d}$ *n'admet aucun zéro réel* $> 1 - (2/\log d)$, *on a*

$$h(-d) \geqslant \frac{2}{\pi e}\sqrt{d}/\log d\,. \tag{28}$$

Soit $\alpha \in]1/2, 1[$ tel que ζ_K ne s'annule pas dans l'intervalle $]\alpha, 1[$. On a alors $\zeta_K(\alpha) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\sum_{C \in Cl(-d)} \Lambda(C, \alpha) \leqslant 0$ (formule (23)). Or il résulte de la formule (22) que $\Lambda(C, \alpha) + (\alpha(1-\alpha))^{-1}$ est positif pour toute classe $C \in Cl(-d)$, et même supérieur à $2\int_1^\infty e^{-2\pi t/\sqrt{d}}(t^{\alpha-1}+t^{-\alpha})dt$ lorsque C est la classe neutre. On a par conséquent

$$h(-d) \geqslant 2\alpha(1-\alpha)\int_1^\infty e^{-2\pi t/\sqrt{d}}(t^{\alpha-1}+t^{-\alpha})dt\,.$$

Le second membre de (28) est majoré par 1 pour $d \leqslant 800$, par 2 pour $d \leqslant 5000$, par 3 pour $d \leqslant 15000$. Il nous suffit donc de démontrer la proposition pour $d \geqslant 15000$. Prenons alors α égal à $1 - (2/\log d)$; remarquons que

$$\int_1^\infty e^{-2\pi t/\sqrt{d}}t^{-\alpha}dt \geqslant \int_1^6 e^{-2\pi t/\sqrt{d}}t^{-1}dt \geqslant e^{-12\pi/\sqrt{d}}\log 6 \geqslant 1,3 \geqslant$$

$$1/\alpha = \int_0^1 t^{\alpha-1}dt \geqslant \int_0^1 e^{-2\pi t/\sqrt{d}}t^{\alpha-1}dt\,,$$

d'où

$$h(-d) \geqslant 2\alpha(1-\alpha)\int_0^\infty e^{-2\pi t/\sqrt{d}}t^{\alpha-1}dt = 2\alpha(1-\alpha)\,(\sqrt{d}/2\pi)^\alpha\Gamma(\alpha)\,.$$

L'application $x \mapsto x(2\pi)^{-x}\Gamma(x)$ étant décroissante sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, on en déduit

[1]) E. LANDAU, *Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper*, Göttingen Nachrichten (1918), 285-295.

$$h(-d) \geqslant \frac{1}{\pi}(1-\alpha)d^{\alpha/2} = \frac{2}{\pi e}(\sqrt{d}/\log d)\,.$$

Si nous sommes entrés dans les détails de cette démonstration, c'est pour bien illustrer les deux points suivants:

1) Nous voyons à l'œuvre le principe général énoncé à la fin du § 2, qui dit que si d est grand et $h(-d)$ est petit, $\zeta_K(s)$ doit ressembler à $\zeta(2s)$: en effet $\zeta_K(s)$ admet un pôle en 1, alors que $\zeta(2s)$ est holomorphe pour $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$; mais si d est grand et $h(-d)$ petit, l'existence du pôle pour ζ_K doit être contrebalancée par l'existence d'un zéro de ζ_K proche de 1, d'après la proposition ci-dessus.

2) Si l'hypothèse de Riemann généralisée était démontrée, les questions posées dans l'introduction de cette deuxième partie seraient résolues: ainsi par exemple il résulterait de la proposition que tous les discriminants fondamentaux $-d$ pour lesquels $h(-d) \leqslant 30$ figurent dans la table de Buell.

§ 4. Minorations non effectives de $h(-d)$

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, $h(-d)$ est grand lorsque d est grand et que la fonction $L(\chi_d, s)$, où $\chi_d(n) = \left(\frac{-d}{n}\right)$, n'a pas de zéro voisin de 1. Supposons alors que $h(-d)$ et $h(-d')$ soient petits pour deux grandes valeurs de d et d' (en un sens que l'on peut préciser, ce que je ne ferai pas ici). Les fonctions $L(\chi_d, s)$ et $L(\chi_{d'}, s)$ ont alors chacune un zéro voisin de 1, et l'on en déduit que la fonction zêta du corps biquadratique $\mathbf{Q}[i\sqrt{d}, i\sqrt{d'}]$ a deux zéros voisins de 1. Des estimées élémentaires permettent d'en déduire une contradiction. Cette méthode montre que $h(-d)$ ne peut être petit que pour au plus un grand d. Elle est une variante de celle utilisée par Heilbronn pour montrer que

$$\lim_{d\to\infty} h(-d) = \infty\,, \tag{29}$$

et a été utilisée par Siegel [1]) pour préciser à quelle allure $h(-d)$ tend vers $+\infty$: Siegel montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $d(\varepsilon)$ tel que: $h(-d) \geqslant \sqrt{d}^{\,1-\varepsilon}$ pour $d \geqslant d(\varepsilon)$.

[1]) C. L. Siegel, *Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper*, Acta Arithmetica 1 (1936), 83-86.