AJOUT, DÉCEMBRE 1985

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

[MvN] MURRAY, F. D. and J. VON NEUMANN. On rings of operators *IV*. *Ann. of Math. 44* (1943), 716-808.
[Na] NAMIOKA, I. Følner's conditions for amenable semigroups. *Math. Scand. 15* (1964), 18-28.
[Pa] PASCHKE, W. Inner amenability and conjugation operators. *Proc. Amer. Math. Soc. 71* (1978), 117-118.
[Pi] PIER, J. P. Quasi-invariance intérieure sur les groupes localement compacts. *Actes du 6e Congrès des Math. d'Exp. latine*, Luxembourg 1981 (Gauthier-Villars 1982), 431-436.
[Ra] RAGHUNATHAN, M. S. *Discrete subgroups of Lie groups*. Springer 1972.
[Ro] ROSENBLATT, J. M. A generalization of Følner's condition. *Math. Scand. 33* (1973), 153-170.
[Sa] SAKAI, S. *C*-algebras and W*-algebras*. Springer 1971.
[Ta] TARSKI, A. *Cardinal algebras*. Oxford Univ. Press 1949.
[Z] LYNDON, R. C. and P. E. SCHUPP. *Combinatorial group theory*. Springer 1977.

AJOUT, DÉCEMBRE 1985

En complément au corollaire 2, notons qu'un groupe Γ est intérieurement moyennable dès qu'il satisfait à l'une des conditions suivantes:

(viii) Γ agit sur un ensemble non vide X muni d'une moyenne Γ-invariante μ de telle sorte que l'isotropie $I(x)$ soit intérieurement moyennable pour tout $x \in X$.

(ix) Γ possède un sous-groupe intérieurement moyennable Γ' d'indice fini.

(x) Il existe une suite exacte $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ avec Γ'' intérieurement moyennable, de même que $\{ g \in \Gamma \mid ghg^{-1}h^{-1} \in \Gamma' \}$ pour tout $h \in \Gamma - \Gamma'$.

L'assertion (ix) résulte de (viii), pour l'action de Γ sur $X = \Gamma/\Gamma'$; elle répond partiellement à la dernière question du § 2. L'assertion (x) résulte aussi de (viii), pour l'action de Γ sur $\Gamma'' - 1$. L'assertion (viii) est « du type Fubini » et se montre comme suit (voir aussi la proposition 3.5 de l'article de Rosenblatt cité ci-dessous).

Soient $Y = \{ x \in X \mid I(x) = 1 \}$ et $Z = X - Y$; soit D un domaine fondamental, c'est-à-dire un sous-ensemble de X rencontrant chaque Γ-orbite en un unique point. Si $\mu(Y) \neq 0$ alors Γ est moyennable car, après normalisation, $S \mapsto \mu(SD)$ est une moyenne invariante sur Γ. Si $\mu(Y) = 0$ on choisit pour tout $x \in Z \cap D$ une moyenne intérieurement invariante μ_x sur $l^\infty(I(x)-1)$;

pour $f \in l^\infty(\Gamma - 1)$ on définit $\tilde{f} \in l^\infty(Z)$ par $\tilde{f}(gx) = \int_{I(x)} f(ghg^{-1}) d\mu_x(h)$ pour $g \in \Gamma$ et $x \in D \cap Z$; alors $f \mapsto \int_Z \tilde{f}(z) d\mu(z)$ est une moyenne intérieurement invariante sur $l^\infty(\Gamma - 1)$.

L'assertion (viii) a une variante classique: si Γ agit sur un ensemble X possédant une moyenne Γ-invariante μ de telle sorte que $I(x)$ est moyennable pour tout $x \in X$, alors Γ est moyennable (même preuve, avec $\tilde{f}(gx) = \int_{I(x)} f(gh) d\mu_x(h)$). On peut donc généraliser la troisième condition du corollaire 3 en

(iii') Si Γ possède un sous-groupe non moyennable Γ' tel que le centralisateur $I_g = \{h \in \Gamma' \mid gh = hg\}$ est moyennable pour tout $g \in \Gamma - 1$, alors Γ n'est pas intérieurement moyennable

(considérer l'action de Γ' sur $X = \Gamma - 1$). Il en résulte par exemple que $SO(3)$ n'est pas intérieurement moyennable (considérer $\Gamma' = \Gamma$). Il en résulte aussi qu'il existe un groupe (construit par Ol'shanskii) dont tous les sous-groupes propres sont cycliques et qui n'est pas intérieurement moyennable.

Enfin, il nous paraît utile de compléter comme suit les références.

Ol'shanskii, A. Yu. On the problem of the existence of an invariant mean on a group. *Russian Math. Surveys 35 (4)* (1980), 180-181.

Paterson, A. L. T. Non amenability and Borel paradoxical decompositions for locally compact groups. *Proc. Amer. Math. Soc. 96* (1986), 89-90.

Pier, J. P. *Amenable locally compact groups.* Wiley 1984.

Rosenblatt, J. M. Uniqueness of invariant means for measure-preserving transformations. *Trans. Amer. Math. Soc. 265* (1981), 623-636.

Wagon, S. *The Banach-Tarski paradox.* Cambridge Univ. Press 1985.

(Reçu le 22 janvier 1985)

Erik Bédos

Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo
Blindern Oslo 3

Pierre de la Harpe

Section de Mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
1211 Genève 24

vide-leer-empty