

# §5. Calcul de la trace de l'algèbre $A_\alpha$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(v) pour  $\Lambda_1, \Lambda_2$  caractères de  $F_2^\times$ , on a

$$(q+1)^{-1} \sum_{\Lambda} G_2(\Lambda_1 \Lambda) G_2(\Lambda_2 \Lambda) \\ = \frac{g(\lambda_1) g(\lambda_2) G_2(\Lambda_1 \Lambda_2)}{g(\lambda_1 \lambda_2)} + q(q-1) \delta(\lambda_1 \lambda_2) \lambda_1(-1) (\Lambda_1 \Lambda_2) (\varepsilon_0),$$

ici  $\lambda_1$  (resp.  $\lambda_2$ ) dénote la restriction de  $\Lambda_1$  (resp.  $\Lambda_2$ ) à  $F^\times$ , l'on somme sur les caractères  $\Lambda$  de  $F_2^\times$  dont la restriction à  $F^\times$  soit triviale,  $\varepsilon_0$  désigne un élément de  $F_2^\times$  tel que  $\varepsilon_0^{q-1} = -1$ .

Les cinq identités sont des cas particuliers d'une identité plus générale qui fait l'objet du théorème 2 de notre publication [4]. La démonstration se base sur l'étude de certaines algèbres commutatives de degré 4 sur  $F$  et fait intervenir le groupe symétrique des permutations de quatre éléments ainsi que le groupe diédral  $D_4$  du carré. L'identité générale s'énonce pour chaque  $\sigma \in D_4$ , mais elle ne dépend que de la classe de conjugaison de  $\sigma$ . Les cinq classes de conjugaison de  $D_4$  fournissent les cinq identités de Barnes.

Dans la suite de cet article nous calculons la trace de l'algèbre  $A_\alpha$  (§ 5) et nous utilisons les identités de Barnes (i) et (iv) pour exhiber les homomorphismes d'algèbres de  $A_\alpha$  dans  $\mathbf{C}$  indépendamment de la table des caractères (§ 6). La comparaison de leur somme avec la trace montre que la liste des homomorphismes est complète et sans répétitions.

### § 5. CALCUL DE LA TRACE DE L'ALGÈBRE $A_\alpha$

On note  $T_\alpha$  la trace de l'algèbre  $A_\alpha$ ,  $\alpha \in X$  fixé. Soit  $B$  la base de  $A_\alpha$  formée par l'unité et les  $b(\gamma)$ , avec  $\gamma \in X$ ; pour  $b \in B$  et  $a \in A_\alpha$ , on définit le coefficient  $\langle b' | a \rangle$  dans  $\mathbf{C}$  par la condition suivante:

$$a = \sum_{b \in B} \langle b' | a \rangle b;$$

on a, pour tout  $a \in A_\alpha$ ,

$$T_\alpha(a) = \sum_{b \in B} \langle b' | ab \rangle.$$

On obtient

$$T_\alpha(1) = \dim_{\mathbf{C}}(A_\alpha) = q$$

et

$$T_\alpha(b(\gamma_1)) = \sum_{\gamma_2} \langle b(\gamma_2)' | b(\gamma_1) b(\gamma_2) \rangle$$

puisque  $\langle 1' | b(\gamma) \rangle = 0$ , pour tout  $\gamma \in X$ . D'après (5), l'on calcule

$$\begin{aligned} \langle b(\gamma_2)' | b(\gamma_1) b(\gamma_2) \rangle &= q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1) (-1) g(\alpha\gamma_1\gamma_2) g(\gamma_1\gamma_2^{-1}) g(\gamma_2\gamma_2^{-1}) \\ &= -q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1) (-1) g(\alpha\gamma_1\gamma_2) g(\gamma_1\gamma_2^{-1}), \end{aligned}$$

pour  $\gamma_1, \gamma_2 \in X$ , d'où

$$T_\alpha(b(\gamma_1)) = -q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1) (-1) \sum_{\gamma_2} g(\alpha\gamma_1\gamma_2) g(\gamma_1\gamma_2^{-1}),$$

ici l'on somme sur  $\gamma_2 \in X$  et  $\gamma_1$  est dans  $X$ . On a donc le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** *La trace  $T_\alpha$  de l'algèbre  $A_\alpha$  prend les valeurs suivantes sur les générateurs:  $T_\alpha(1) = q$  et*

$$(6) \quad T_\alpha(b(\gamma)) = -q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma) (-1) \sum_{\beta_1 \beta_2 = \alpha\gamma^2} g(\beta_1) g(\beta_2),$$

ici  $\gamma, \beta_1$  et  $\beta_2$  désignent des éléments de  $X$ .

**LEMME 2.** *Pour  $\beta \in X$ , on a*

$$(7) \quad (q-1)^{-1} \sum_{\beta_1 \beta_2 = \beta} g(\beta_1) g(\beta_2) = \sum_a e(2a) \beta(a),$$

avec  $\beta_1, \beta_2 \in X$  et  $a \in F^\times$ .

C'est un cas particulier du lemme 5, (b) qu'on démontrera au § 5. Plus explicitement, on obtient

$$(q-1)^{-1} \sum_{\beta_1 \beta_2 = \beta} g(\beta_1) g(\beta_2) = \begin{cases} (q-1) \delta(\beta), & \text{si } 2 = 0 \text{ dans } F, \\ \beta \left( \frac{1}{2} \right) g(\beta), & \text{sinon.} \end{cases}$$

**COROLLAIRE 1.** *On a explicitement*

$$(8) \quad T_\alpha(b(\gamma)) = \begin{cases} -q^{-1} \gamma(-1) \delta(\alpha\gamma^2), & \text{si la caractéristique de } F \text{ est } 2, \\ -q^{-1} (q-1)^{-1}(\alpha\gamma) (-1) (\alpha^{-1}\gamma^{-2}) (2) g(\alpha\gamma^2), & \text{sinon.} \end{cases}$$