§5. Calcul de la trace de l'algèbre A_α

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

(v) *pour* Λ_1, Λ_2 *caractères de* $F_2^\times$, *on a*

$$(q+1)^{-1} \sum_{\Lambda} G_2(\Lambda_1\Lambda)\, G_2(\Lambda_2\Lambda)$$

$$= \frac{g(\lambda_1)\, g(\lambda_2)\, G_2(\Lambda_1\Lambda_2)}{g(\lambda_1\lambda_2)} + q(q-1)\, \delta(\lambda_1\lambda_2)\, \lambda_1(-1)\, (\Lambda_1\Lambda_2)\, (\varepsilon_0)\,,$$

ici λ_1 *(resp.* λ_2*) dénote la restriction de* Λ_1 *(resp.* Λ_2*) à* $F^\times$, *l'on somme sur les caractères* Λ *de* $F_2^\times$ *dont la restriction à* $F^\times$ *soit triviale,* ε_0 *désigne un élément de* $F_2^\times$ *tel que* $\varepsilon_0^{q-1} = -1$.

Les cinq identités sont des cas particuliers d'une identité plus générale qui fait l'objet du théorème 2 de notre publication [4]. La démonstration se base sur l'étude de certaines algèbres commutatives de degré 4 sur F et fait intervenir le groupe symétrique des permutations de quatre éléments ainsi que le groupe diédrale D_4 du carré. L'identité générale s'énonce pour chaque $\sigma \in D_4$, mais elle ne dépend que de la classe de conjugaison de σ. Les cinq classes de conjugaison de D_4 fournissent les cinq identités de Barnes.

Dans la suite de cet article nous calculons la trace de l'algèbre A_α (§ 5) et nous utilisons les identités de Barnes (i) et (iv) pour exhiber les homomorphismes d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$ indépendamment de la table des caractères (§ 6). La comparaison de leur somme avec la trace montre que la liste des homomorphismes est complète et sans répétitions.

§ 5. Calcul de la trace de l'algèbre A_α

On note T_α la trace de l'algèbre A_α, $\alpha \in X$ fixé. Soit B la base de A_α formée par l'unité et les $b(\gamma)$, avec $\gamma \in X$; pour $b \in B$ et $a \in A_\alpha$, on définit le coefficient $<b' \mid a>$ dans $\mathbf{C}$ par la condition suivante:

$$a = \sum_{b \in B} <b' \mid a>\, b\,;$$

on a, pour tout $a \in A_\alpha$,

$$T_\alpha(a) = \sum_{b \in B} <b' \mid ab>\,.$$

On obtient

$$T_\alpha(1) = \dim_{\mathbf{C}}(A_\alpha) = q$$

et

$$T_\alpha(b(\gamma_1)) = \sum_{\gamma_2} <b(\gamma_2)' \mid b(\gamma_1)\, b(\gamma_2)>$$

puisque $<1' \mid b(\gamma)> = 0$, pour tout $\gamma \in X$. D'après (5), l'on calcule

$$\begin{aligned} <b(\gamma_2)' \mid b(\gamma_1)\, b(\gamma_2)> &= q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1)(-1)\, g(\alpha\gamma_1\gamma_2)\, g(\gamma_1\gamma_2^{-1})\, g(\gamma_2\gamma_2^{-1}) \\ &= -q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1)(-1)\, g(\alpha\gamma_1\gamma_2)\, g(\gamma_1\gamma_2^{-1}), \end{aligned}$$

pour $\gamma_1, \gamma_2 \in X$, d'où

$$T_\alpha(b(\gamma_1)) = -q^{-1}(q-1)^{-2}(a\gamma_1)(-1) \sum_{\gamma_2} g(\alpha\gamma_1\gamma_2)\, g(\gamma_1\gamma_2^{-1}),$$

ici l'on somme sur $\gamma_2 \in X$ et γ_1 est dans X. On a donc le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *La trace* T_α *de l'algèbre* A_α *prend les valeurs suivantes sur les générateurs:* $T_\alpha(1) = q$ *et*

$$T_\alpha(b(\gamma)) = -q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma)(-1) \sum_{\beta_1\beta_2=\alpha\gamma^2} g(\beta_1)\, g(\beta_2), \tag{6}$$

ici γ, β_1 *et* β_2 *désignent des éléments de* X.

LEMME 2. *Pour* $\beta \in X$, *on a*

$$(q-1)^{-1} \sum_{\beta_1\beta_2=\beta} g(\beta_1)\, g(\beta_2) = \sum_a e(2a)\, \beta(a), \tag{7}$$

avec $\beta_1, \beta_2 \in X$ *et* $a \in F^\times$.

C'est un cas particulier du lemme 5, (b) qu'on démontrera au § 5. Plus explicitement, on obtient

$$(q-1)^{-1} \sum_{\beta_1\beta_2=\beta} g(\beta_1)\, g(\beta_2) = \begin{cases} (q-1)\,\delta(\beta), & \text{si } 2 = 0 \text{ dans } F, \\ \beta\left(\dfrac{1}{2}\right) g(\beta), & \text{sinon.} \end{cases}$$

COROLLAIRE 1. *On a explicitement*

$$T_\alpha(b(\gamma)) = \begin{cases} -q^{-1}\,\gamma(-1)\,\delta(\alpha\gamma^2), & \textit{si la caractéristique de } F \textit{ est } 2, \\ -q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma)(-1)\,(\alpha^{-1}\gamma^{-2})(2)\, g(\alpha\gamma^2), & \textit{sinon}. \end{cases} \tag{8}$$