§4. Rappel de la table des caractères de G CALCUL DES VALEURS DES CARACTÈRES DE G SUR LES GÉNÉRATEURS DE A_α

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

THÉORÈME 1. *L'unité et les éléments* $b(\gamma)$, *avec* $\gamma \in X$, *forment une base de l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre* A_α. *La structure d'algèbre s'exprime par la relation suivante :*

$$b(\gamma_1)\, b(\gamma_2) = q^{-1}(q-1)^{-1}\, \delta(\alpha\gamma_1\, \gamma_2) \tag{5}$$
$$+\, q^{-1}(q-1)^{-2}\, (\alpha\gamma_1\gamma_2)(-1)\, g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_{\gamma} \gamma(-1)\, g(\gamma_1\gamma^{-1}) g(\gamma_2\gamma^{-1}) b(\gamma)$$

pour $\gamma_1, \gamma_2 \in X$; *on somme sur* $\gamma \in X$.

§ 4. RAPPEL DE LA TABLE DES CARACTÈRES DE G CALCUL DES VALEURS DES CARACTÈRES DE G SUR LES GÉNÉRATEURS DE A_α

Les caractères sont en « dualité » avec les classes de conjugaison. Correspondant aux quatre « types » de telles classes, il y a quatre « séries » de caractères. Toute la situation se résume dans le tableau suivant:

		caractères	χ_μ^1	χ_μ^q	$\chi_{\mu,\upsilon}$	χ_Λ
classes de conjugaison		paramètres	$\mu \in X$	$\mu \in X$	$\mu, \upsilon \in X$ $\mu \neq \upsilon$ modulo $(\mu, \upsilon) \sim (\upsilon, \mu)$	$\Lambda \in Y$ modulo $\Lambda \sim \Lambda^q$
représentant	diviseurs élémentaires					
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$X-a$ $X-a$	$a \in F^\times$	$\mu^2(a)$	$q\, \mu^2(a)$	$(q+1)\, \mu\upsilon(a)$	$(q-1)\, \Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$	1 $(X-a)^2$	$a \in F^\times$	$\mu^2(a)$	0	$\mu\upsilon(a)$	$-\Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$	1 $(X-a)(X-d)$	$a, d \in F^\times$ $a \neq d$ modulo $(a, d) \sim (d, a)$	$\mu(ad)$	$\mu(ad)$	$\mu(a)\, \upsilon(d)$ $+\, \mu(d)\, \upsilon(a)$	0
$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{N}(x) \\ -1 & \mathrm{Tr}(x) \end{pmatrix}$	1 $X^2 - \mathrm{Tr}(x)X + \mathrm{N}(x)$	$x \in E^\times$ $x \notin F^\times$ modulo $x \sim x^q$	$\mu(\mathrm{N}(x))$	$-\mu(\mathrm{N}(x))$	0	$-(\Lambda + \Lambda^q)(x)$

Ici E désigne le corps fini a q^2 éléments, Tr (resp. N) dénote la trace (resp. norme) de E sur F, i.e. pour $x \in E$, on a

$$\mathrm{Tr}(x) = x + x^q \quad \text{et} \quad \mathrm{N}(x) = x\, x^q ,$$

Y désigne le groupe des caractères de $E^\times$.

Une des nombreuses références pour le calcul des caractères de G est [9].

Pour tout caractère χ de G, nous désignons aussi par χ l'extension par linéarité de χ à $\mathbf{C}\,[G]$ et nous nous proposons d'en calculer la restriction à la sous-algèbre A_α. Pour l'unité e de A_α, on obtient

$$\chi(e) = \chi(e_\theta) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \theta(h^{-1})\,\chi(h) = <\theta, \mathrm{Res}_H^G\, \chi> = <\mathrm{Ind}_H^G\, \theta, \chi>$$

et d'une manière explicite:

$$\chi(e) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a,b} \bar{\alpha}(a)\,\bar{\psi}(b)\,\chi\big(c(a)\,u(b)\big), \quad a \in F^\times, b \in F^+ ;$$

or la suite des diviseurs élémentaires de $c(a)\,u(b)$ est $1, (X-a)^2$, si $b \neq 0$, et $X-a, X-a$, si $b = 0$, pour $a \in F^\times$, $b \in F^+$, d'où:

$$\chi(e) = q^{-1}(q-1)^{-1} \Big(\sum_{a,\, b \neq 0} \bar{\alpha}(a)\,\bar{\psi}(b)\,\chi\big(1, (X-a)^2\big) + \sum_{a} \bar{\alpha}(a)\,\chi(X-a, X-a)\Big)$$

$a, b \in F$; mais ψ étant un caractère non-trivial de F^+, on a

$$\sum_{b \neq 0} \psi(b) = -1, b \in F, \qquad \text{d'où}$$

$$\chi(e) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a} \bar{\alpha}(a)\,\big[\chi(X-a, X-a) - \chi\big(1, (X-a)^2\big)\big], \quad a \in F^\times .$$

En utilisant la table des caractères, on obtient, pour $\mu, \upsilon \in X$,

$$\chi_\mu^1(e) = 0, \chi_\mu^q(e) = \delta(\alpha^{-1}\,\mu^2), \chi_{\mu,\upsilon}(e) = \delta(\alpha^{-1}\mu\upsilon)$$

et $\chi_\Lambda(e) = \delta(\alpha^{-1}\lambda)$, où λ dénote la restriction de Λ à $F^\times$, pour $\Lambda \in Y$.

D'après [2], Corollaire 1.2, les homomorphismes d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$ sont donnés par les caractères χ de G, tels que $\chi(e) = 1$. Nous calculons, dans la suite, leurs valeurs sur les générateurs $b(\gamma)$ de A_α avec $\gamma \in X$.

Lemme 1. *Soit χ un caractère de G et $\gamma \in X$; on a*

$$\chi\big(b(\gamma)\big)$$
$$= q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1) \sum_{\substack{a,\, c \in F^\times \\ b \in F^+}} (\alpha^{-1}\gamma^{-2})\,(a)\,\gamma(c)\,\bar{\psi}(a^{-1}b)\,\chi(1, X^2 - bX + c),$$

ici α dénote le caractère central fixé.

En effet, on a $\chi(b(\gamma)) = (q-1)^{-1} \sum_a \gamma(a)\chi(a), \quad a \in F^\times$.

Or

$$b(a) = ed(a)ze = q^{-2}(q-1)^{-2} \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} \alpha(a_1 a_2)\, \psi(b_1+b_2) c(a_1) u(b_1) d(a) z c(a_2) u(b_2)$$

$$= q^{-2}(q-1)^{-1} \sum_{a_1, b_1, b_2} \bar{\alpha}(a_1)\, \bar{\psi}(b_1+b_2)\, c(a_1)\, u(b_1)\, d(a) z u(b_2),\ a_1, a_2 \in F^\times, b_1, b_2 \in F^+.$$

La suite des diviseurs élémentaires de $c(a_1)\, u(b_1)\, d(a)\, z\, u(b_2)$ est égale à $1, X^2 - a_1(b_1+b_2)X - a_1^2 a$, pour $a_1, a \in F^\times, b_1, b_2 \in F^+$, d'où

$$\chi(b(a)) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a_1, b} \bar{\alpha}(a_1)\, \bar{\psi}(b)\, \chi(1, X^2 - a_1 bX - a_1^2 a),\ a_1 \in F^\times, b \in F^+.$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a_1, b} \bar{\alpha}(a_1)\, \bar{\psi}(a_1^{-1} b)\, \chi(1, X^2 - bX - a_1^2 a),\ a_1 \in F^\times, b \in F^+.$$

On obtient donc

$$\chi(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, b} \alpha(a_1^{-1})\, \gamma(a)\, \bar{\psi}(a_1^{-1} b)\, \chi(1, X^2 - bX - a_1^2 a),\ a, a_1 \in F^\times, b \in F$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a_1, c, b} \alpha(a_1^{-1})\, \gamma(-a_1^{-2} c)\, \bar{\psi}(a_1^{-1} b)\, \chi(1, X^2 - bX + c)$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-2} \gamma(-1) \sum_{a, c, b} (\alpha^{-1} \gamma^{-2})(a)\, \gamma(c)\, \bar{\psi}(a^{-1} b)\, \chi(1, X^2 - bX + c),$$

ce qui prouve le lemme 1.

PROPOSITION 2. *Les valeurs des caractères de* G *sur les générateurs de* A *sont données par:*

$$\chi_\mu^1(e) = \chi_\mu^1(b(\gamma)) = 0,$$

$$\chi_\mu^q(e) = \delta(\alpha^{-1}\mu^2),\ \chi_\mu^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-1}\delta(\alpha^{-1}\mu^2)\, \gamma(-1)\, g(\gamma\mu)^2,$$

$$\chi_{\mu,\upsilon}(e) = \delta(\alpha^{-1}\mu\upsilon),\ \chi_{\mu,\upsilon}(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-1}\delta(\alpha^{-1}\mu\upsilon)\, (\alpha\gamma)(-1)\, g(\gamma\mu)\, g(\gamma\upsilon),$$

$$\chi_\Lambda(e) = \delta(\alpha^{-1}\lambda),\ \chi_\Lambda(b(\gamma)) = -q^{-1}(q-1)^{-1}\, \delta(\alpha^{-1}\lambda)\, (\alpha\gamma)(-1)\, G(\gamma^*\Lambda);$$

ici $\mu, \upsilon, \gamma \in X, \alpha$ *caractère central fixé,* $\Lambda \in Y$; λ *dénote la restriction de* Λ *à* $F^\times$ *et* γ^* *dénote le composé de* γ *avec la norme de* $E^\times$ *sur* $F^\times$; *la somme de Gauss* $G(\Lambda\gamma^*)$ *est définie par*

$$G(\Lambda\gamma^*) = \sum_{x \in E^\times} (\Lambda\gamma^*)(x)\, \psi(\mathrm{Tr}(x)).$$

Démonstration. Les valeurs sur l'unité e ont déjà été calculées au début du paragraphe. De $\chi_\mu^1(1, X^2 - bX + c) = \mu(c)$, pour tout $b \in F^+$, $c \in F^\times$, $\mu \in X$ on déduit que $\chi_\mu^1(b(\gamma)) = 0$, pour tout $\gamma \in X$.

D'après le lemme 1, on obtient

$$\chi_\mu^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1) \sum_{a,c,b} (\alpha^{-1}\,\gamma^{-2})\,(a)\gamma(c)\,\bar{\psi}(a^{-1}b)\,\chi_\mu^q(1,\, X^2-bX+c)\,;$$

d'après la table des caractères, on a

$$\chi_\mu^q(1,\, X^2-bX+c) = \begin{cases} 0 \\ \mu(a_1 a_2) \qquad\qquad \text{si} \qquad X^2-bX+c \\ -\mu(\mathrm{N}(x)) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (X-a)^2 & \text{avec} \quad a \in F^\times \\ (X-a_1(X-a_2)) & \text{avec} \quad a_1,\, a_2 \in F^\times,\, a_1 \neq a_2 \\ (X-x)\,(X-x^q) & \text{avec} \quad x \in E^\times - F^\times \end{cases}$$

d'où

$$\chi_\mu^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1)\,\frac{1}{2} \sum_{\substack{a \\ a_1 \neq a_2}} (\alpha^{-1}\,\gamma^{-2}(a))\,\gamma(a_1 a_2)\,\bar{\psi}(a^{-1}(a_1+a_2))\,\mu(a_1\,a_2)$$

$$-\, q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1)\,\frac{1}{2} \sum_{\substack{a \\ x \neq x^q}} (\alpha^{-1}\,\gamma^{-2})\,(a)\,\gamma(\mathrm{N}(x))\,\bar{\psi}(a^{-1}\mathrm{Tr}(x))\mu(\mathrm{N}(x))\,,$$

ici l'on somme sur a, a_1, $a_2 \in F^\times$ et $x \in E^\times$. On ne change rien à la valeur de $\chi_\mu^q(b(\gamma))$ si dans les sommations on enlève la restriction $a_1 \neq a_2$ et $x \neq x^q$. Après un changement d'indices de sommation, l'on obtient

$$\chi_\mu^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1)\,\frac{1}{2}\Big(\sum_{a,\,a_1,\,a_2} (\alpha^{-1}\,\mu^2)\,(a)\,\gamma(a_1 a_2)\,\psi(a_1+a_2)\,\mu(a_1 a_2)$$

$$-\sum_{a,\,x} (\alpha^{-1}\mu^2)\,(a)\,\gamma(\mathrm{N}(x))\psi(\mathrm{Tr}(x))\,\mu(\mathrm{N}(x))\Big),\; a,\, a_1,\, a_2 \in F^\times,\, x \in E^\times\,,$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-1}\,\gamma(-1)\,\delta(\alpha^{-1}\,\mu^2)\,\frac{1}{2}\,[g(\gamma\mu)^2 - G((\gamma\mu)^*)]\,,$$

où $G((\gamma\mu)^*) = \sum_{x \in E^\times} (\gamma\mu)\,(\mathrm{N}(x))\,\psi(\mathrm{Tr}(x))$. D'après le théorème de Davenport et Hasse [3], on a $G((\gamma\mu)^*) = -g(\gamma\mu)^2$, d'où

$$\chi_\mu^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-1}\,\gamma(-1)\,\delta(\alpha^{-1}\mu^2)\,g(\gamma\mu)^2\,.$$

Le calcul de $\chi_{\mu,\,\upsilon}(b(\gamma))$ est plus facile, on obtient, d'après le lemme 1 et la table des caractères

$$\chi_{\mu,\upsilon}(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1)\sum_{a,a_1,a_2}(\alpha^{-1}\gamma^{-2})(a)\,\gamma(a_1a_2)\,\bar{\psi}(a^{-1}(a_1+a_2))\,\mu(a_1)\,\upsilon$$

$a, a_1, a_2 \in F^\times$,

$$= q^{-1}(q-1)^{-2}(\gamma\mu\upsilon)(-1)\sum_{a,c_1,c_2}(\alpha^{-1}\mu\upsilon)(a)\,(\gamma\mu)(c_1)\,(\gamma\upsilon)(c_1)\,\psi(c_1+c_2),$$

$a, c_1, c_2 \in F^\times$,

$$= q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma)(-1)\,\delta(\alpha^{-1}\mu\upsilon)\,g(\gamma\mu)\,g(\gamma\upsilon);$$

le calcul de $\chi_\Lambda(b(\gamma))$ est analogue et est laissé au lecteur. La démonstration de la proposition 2 est ainsi terminée.

Remarque 1. Soit χ un caractère de G tel que $\chi(e) = 1$. Un tel caractère définit un homomorphisme d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$, comme on l'a déjà remarqué, c.f. [2]. On a donc

$$\chi(b(\gamma_1))\,\chi(b(\gamma_2)) = \chi(b(\gamma_1)b(\gamma_2)),$$

pour γ_1, $\gamma_2 \in X$, et la relation (5) du théorème 1 donne ainsi lieu à l'identité suivante:

$$(5)^\chi \qquad \chi(b(\gamma_1))\,\chi(b(\gamma_2)) = q^{-1}(q-1)^{-1}\,\delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) + q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1\gamma_2)(-1)\,g(\alpha\gamma_1\gamma_2)\sum_\gamma \gamma(-1)\,g(\gamma_1\gamma^{-1})\,g(\gamma_2\gamma^{-1})\,\chi(b(\gamma))$$

pour γ_1, $\gamma_2 \in X$, sommation sur $\gamma \in X$.

Remarque 2. En spécialisant la remarque 1, pour $\chi = \chi_\mu^q$ (resp. $\chi = \chi_{\mu,\nu}$, resp. $\chi = \chi_\Lambda$) avec $\mu \in X$ tel que $\mu^2 = \alpha$ (resp. avec $\mu, \nu \in X$ tels que $\mu \neq \nu$ et $\mu\nu = \alpha$, resp. avec $\Lambda \in Y$ tel que $\Lambda \neq \Lambda^q$ et $\lambda = \alpha$) et en appliquant la proposition 2, on obtient les identités suivantes:

$$(5)_\mu^q \qquad g(\gamma_1\mu)^2\,g(\gamma_2\mu)^2 = q(q-1)\,\delta(\gamma_1\gamma_2\mu^2) + (q-1)^{-1}\,g(\gamma_1\gamma_2\mu^2)\sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\,g(\gamma_2\gamma^{-1})\,g(\mu\gamma)^2,.$$

resp.

$$(5)_{\mu,\nu} \qquad g(\gamma_1\mu)\,g(\gamma_1\nu)\,g(\gamma_2\mu)\,g(\gamma_2\nu) = q(q-1)\,\delta(\gamma_1\gamma_2\mu\nu)\,(\mu\nu)(-1) + (q-1)^{-1}\,g(\gamma_1\gamma_2\mu\nu)\sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\,g(\gamma_2\gamma^{-1})\,g(\mu\gamma)\,g(\nu\gamma),$$

resp.

$$(5)_\Lambda \qquad G(\gamma_1^*\Lambda)\,G(\gamma_2^*\Lambda) = q(q-1)\,\delta(\gamma_1\gamma_2\lambda)\,\lambda(-1) - (q-1)^{-1}\,g(\gamma_1\gamma_2\lambda)\sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\,g(\gamma_2\gamma^{-1})\,G(\gamma^*\Lambda),$$

pour γ_1, $\gamma_2 \in X$, sommation sur $\gamma \in X$.

Remarque 3. On observe que les identités $(5)_{\mu,\nu}$ [resp. $(5)_\Lambda$] considérées pour tous les $\mu, \nu \in X$ [resp. $\Lambda \in Y$] contiennent l'identité $(5)^q_\mu$ comme cas particulier « dégénéré », correspondant à $\mu = \nu$ [resp. $\Lambda = \Lambda^q$, $\Lambda = \mu \circ N$].

Remarque 4. Pour tout $\beta \in X$, on a $\delta(\beta)\, g(\beta) = -1$. Les identités peuvent donc s'énoncer sous la forme suivante:

$$(5)_{\mu,\nu} \qquad (q-1)^{-1} \sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\, g(\gamma_2\gamma^{-1})\, g(\mu\gamma)\, g(\nu\gamma)$$

$$= \frac{g(\gamma_1\mu)\, g(\gamma_1\nu)\, g(\gamma_2\mu)\, g(\gamma_2\nu)}{g(\gamma_1\gamma_2\mu\nu)} + q(q-1)\,\delta(\gamma_1\gamma_2\mu\nu)\,(\mu\nu)\,(-1)\,,$$

pour tous $\gamma_1, \gamma_2, \mu, \nu \in X$, sommation sur $\gamma \in X$, et

$$(5)_\Lambda \qquad -(q-1)^{-1} \sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\, g(\gamma_2\gamma^{-1})\, G(\gamma^*\Lambda)$$

$$= \frac{G(\gamma_1^*\Lambda)\, G(\gamma_2^*\Lambda)}{g(\gamma_1\gamma_2\lambda)} + q(q-1)\,\delta(\gamma_1\gamma_2\lambda)\,\lambda(-1)\,,$$

pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in X$, $\Lambda \in Y$, sommation sur $\gamma \in X$, λ dénote la restriction de Λ à $F^\times$.

Nous reconnaissons ainsi les identités (i) et (iv) du théorème 1 de notre publication [4], dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous, et nous voyons bien comment la série principale (resp. discrète) de caractères $\chi_{\mu,\nu}$ (resp. χ_Λ) amène aux identités de Barnes (i) (resp. (iv)). Ceci termine la première partie de cet article.

RAPPEL DU THÉORÈME 1 DE [4]. *Soit F (resp. F_2, resp. F_4) le corps fini à q (resp. q^2, resp. q^4) éléments; on note $F_2^\times$ (resp. $F_4^\times$) le groupe multiplicatif de F_2 (resp. F_4), et on se fixe un caractère non-trivial* exp *du groupe additif F^+. Pour un caractère α de $F^\times$, on pose*

$$G_1(\alpha) = g(\alpha) = \sum_a \alpha(a) \exp(a)\,,$$

où l'on somme sur tous les $a \in F^\times$. On note Tr_2 *(resp.* Tr_4*) la trace de F_2 (resp. F_4) sur F, et l'on note* N *(resp.* $\mathrm{N}_{4/2}$*) la norme de F_2 sur F (resp. F_4 sur F_2). Pour un caractère Λ de $F_2^\times$, on note $G_2(\Lambda)$ la somme de Gauss suivante*

$$G_2(\Lambda) = \sum_x \Lambda(x) \exp(\mathrm{Tr}_2(x))\,,$$

où l'on somme sur tous les $x \in F_2^\times$. *De manière analogue, pour un caractère* Φ *de* $F_4^\times$, *on pose*

$$G_4(\Phi) = \sum_z \Phi(z) \exp\left(\mathrm{Tr}_4(z)\right),$$

où l'on somme sur tous les $z \in F_4^\times$. *On a les cinq identités suivantes:*

(i) *Pour quatre caractères* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *de* $F^\times$, *on a*

$$(q-1)^{-1} \sum_\alpha g(\alpha_1\alpha)\, g(\alpha_2\alpha^{-1})\, g(\alpha_3\alpha)\, g(\alpha_4\alpha^{-1})$$
$$= \frac{g(\alpha_1\alpha_2)\, g(\alpha_2\alpha_3)\, g(\alpha_3\alpha_4)\, g(\alpha_4\alpha_1)}{g(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)} + q(q-1)\, \delta(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)\, (\alpha_1\alpha_3)\, (-1),$$

ici l'on somme sur les caractères α *de* $F^\times$;

(ii) *pour un caractère* Φ *de* $F_4^\times$, *on a*

$$-(q+1)^{-1} \sum_\Lambda G_4\left(\Phi(\Lambda \circ \mathrm{N}_{4/2})\right) = \frac{G_4(\Phi^{q+1})}{g(\varphi)} + q(q-1)\, \delta(\varphi)\, \Phi(\varepsilon_0),$$

ici l'on somme sur les caractères Λ *de* $F_2^\times$ *dont la restriction à* $F^\times$ *soit triviale,* ε_0 *dénote un élément de* F_2 *tel que* $\varepsilon_0^{q-1} = -1$; φ *dénote la restriction de* Φ *à* $F^\times$;

(iii) *pour* Λ_1, Λ_2 *caractères de* $F_2^\times$, *on a*

$$(q-1)^{-1} \sum_\alpha G_2\left(\Lambda_1(\alpha \circ \mathrm{N})\right) G_2\left(\Lambda_2(\alpha \circ \mathrm{N})^{-1}\right)$$
$$= \frac{G_2(\Lambda_1\Lambda_2)\, G_2(\Lambda_1\Lambda_2^q)}{g(\lambda_1\lambda_2)} + q(q-1)\, \delta(\lambda_1\lambda_2)\, \lambda_1(-1),$$

ici λ_1 *(resp.* λ_2*) désigne la restriction de* Λ_1 *(resp.* Λ_2*) à* $F^\times$, *l'on somme sur tous les caractères* α *de* $F^\times$;

(iv) *pour* α_1, α_2 *caractères de* $F^\times, \Lambda$ *caractère de* $F_2^\times$, *on a*

$$-(q-1)^{-1} \sum_\alpha g(\alpha_1\alpha)\, g(\alpha_2\alpha)\, G_2\left(\Lambda(\alpha \circ \mathrm{N})^{-1}\right)$$
$$= \frac{G_2\left(\Lambda(\alpha_1 \circ \mathrm{N})\right) G_2\left(\Lambda(\alpha_2 \circ \mathrm{N})\right)}{g(\alpha_1\alpha_2\lambda)} + q(q-1)\, \delta(\alpha_1\alpha_2\lambda)\, \lambda(-1),$$

ici λ *désigne la restriction de* Λ *à* $F^\times$, *l'on somme sur tous les caractères* α *de* $F^\times$;

(v) *pour* Λ_1, Λ_2 *caractères de* $F_2^\times$, *on a*

$$(q+1)^{-1} \sum_{\Lambda} G_2(\Lambda_1 \Lambda)\, G_2(\Lambda_2 \Lambda)$$

$$= \frac{g(\lambda_1)\, g(\lambda_2)\, G_2(\Lambda_1 \Lambda_2)}{g(\lambda_1 \lambda_2)} + q(q-1)\, \delta(\lambda_1 \lambda_2)\, \lambda_1(-1)\, (\Lambda_1 \Lambda_2)\, (\varepsilon_0)\,,$$

ici λ_1 *(resp.* λ_2*) dénote la restriction de* Λ_1 *(resp.* Λ_2*) à* $F^\times$, *l'on somme sur les caractères* Λ *de* $F_2^\times$ *dont la restriction à* $F^\times$ *soit triviale,* ε_0 *désigne un élément de* $F_2^\times$ *tel que* $\varepsilon_0^{q-1} = -1$.

Les cinq identités sont des cas particuliers d'une identité plus générale qui fait l'objet du théorème 2 de notre publication [4]. La démonstration se base sur l'étude de certaines algèbres commutatives de degré 4 sur F et fait intervenir le groupe symétrique des permutations de quatre éléments ainsi que le groupe diédrale D_4 du carré. L'identité générale s'énonce pour chaque $\sigma \in D_4$, mais elle ne dépend que de la classe de conjugaison de σ. Les cinq classes de conjugaison de D_4 fournissent les cinq identités de Barnes.

Dans la suite de cet article nous calculons la trace de l'algèbre A_α (§ 5) et nous utilisons les identités de Barnes (i) et (iv) pour exhiber les homomorphismes d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$ indépendamment de la table des caractères (§ 6). La comparaison de leur somme avec la trace montre que la liste des homomorphismes est complète et sans répétitions.

§ 5. Calcul de la trace de l'algèbre A_α

On note T_α la trace de l'algèbre A_α, $\alpha \in X$ fixé. Soit B la base de A_α formée par l'unité et les $b(\gamma)$, avec $\gamma \in X$; pour $b \in B$ et $a \in A_\alpha$, on définit le coefficient $<b' \mid a>$ dans $\mathbf{C}$ par la condition suivante:

$$a = \sum_{b \in B} <b' \mid a> b\,;$$

on a, pour tout $a \in A_\alpha$,

$$T_\alpha(a) = \sum_{b \in B} <b' \mid ab>\,.$$

On obtient

$$T_\alpha(1) = \dim_{\mathbf{C}}(A_\alpha) = q$$