

§3. Description de A_α en termes de générateurs et relations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

i.e. les $e_\alpha, \alpha \in X$, forment un système d'idempotents, deux à deux orthogonaux, de somme 1. Chaque $e_\alpha, \alpha \in X$, est un idempotent central, i.e. e_α est dans le centre de l'algèbre du groupe. Posons

$$H = CU.$$

On définit un caractère $\alpha\lambda$ de H par

$$(\alpha\lambda)(cu) = \alpha(c)\lambda(u), \quad \text{pour } c \in C, u \in U.$$

Posons

$$V_\alpha = \text{Ind}_H^G(\alpha\lambda), \quad \text{pour tout } \alpha \in X;$$

cette représentation induite se réalise dans l'idéal à gauche $C[G]e_\alpha e_\lambda$ et l'on a

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X} V_\alpha.$$

L'algèbre d'entrelacement A_α de V_α s'identifie à l'algèbre $e_\alpha e_\lambda C[G] e_\alpha e_\lambda$ qui est égale à $e_\lambda C[G] e_\alpha e_\lambda$, d'où

$$A = \bigoplus_{\alpha \in X} A_\alpha.$$

Dans la suite, on se fixe un caractère central α et l'on étudie l'algèbre A_α .

§ 3. DESCRIPTION DE A_α EN TERMES DE GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

Posons $e = e_\theta$ avec $\theta = \alpha\lambda$, on a alors $A_\alpha = e C[G] e = \text{End}_G(\text{Ind}_H^G(\theta))$. Soit R un système de représentants des doubles classes de G suivant H . On sait que l'ensemble

$$B = \{ere \mid r \in R, ere \neq 0\}$$

forme une base de A_α en tant qu'espace vectoriel sur C . Pour $h, h' \in H, r \in R$, l'on a

$$e h r h' e = \theta(hh') ere.$$

Pour tout $g \in G$, on définit un caractère $g\theta$ de $g H g^{-1}$ par $(g\theta)(x) = \theta(g^{-1}xg)$, si $x \in g H g^{-1}$. On sait que, pour tout $g \in G$, la condition $ege \neq 0$ équivaut à

$$\theta_{/H \cap g H g^{-1}} = g \theta_{/H \cap g H g^{-1}}.$$

Rappelons que

$$u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pour } b \in F^+, c(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ pour } a \in F^\times,$$

$U = \{u(b) \mid b \in F^+\}$ et $C = \{c(a) \mid a \in F^\times\}$ et introduisons, en plus, les notations suivantes:

$$d(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pour } a \in F^\times, D = \{d(a) \mid a \in F^\times\} \text{ et } z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a la décomposition de Bruhat

$$(1) \quad G = C U D \cup C U D z U$$

et on vérifie facilement qu'on a, parmi d'autres, les relations suivantes,

$$(2) \quad d(a) u(b) = u(ab) d(a), a \in F^\times, b \in F^+,$$

$$(3) \quad z u(a) z = c(a) d(-a^{-2}) u(-a) z u(a^{-1}), a \in F^\times,$$

qui nous servirons dans la suite.

La réunion de D et Dz forme un système de représentants des doubles classes de G suivant $H = CU$, comme on le remarque à l'aide de (1). On calcule

$$\begin{aligned} (d(a)\theta)(c u(b)) &= \theta(d(a^{-1}) c u(b) d(a)) \\ &= \theta(c u(a^{-1}b)), \text{ d'après (2),} \\ &= \alpha(c) \psi(a^{-1}b), \end{aligned}$$

pour $a \in F^\times, c \in C$ et $b \in F^+$. Or $d H d^{-1} = H$, pour tout $d \in D$ et le calcul précédent montre que, pour $d \in D$,

$$\theta/H = d\theta/H \text{ si et seulement si } d = 1.$$

Pour $d \in D$, on a donc $ede \neq 0$, si et seulement si $d = 1$. Examinons maintenant le cas d'un représentant $r \in Dz$; on a $r = d(a)z$, avec $a \in F^\times$, et

$$r H r^{-1} = d(a)z C U z d(a^{-1}) = C z U z = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a \in F^\times, b \in F^+ \right\},$$

d'où

$$H \cap r H r^{-1} = C.$$

Mais $\theta/c = dz \theta/c$ pour tout $d \in D$. On a donc $edze \neq 0$, pour tout $d \in D$. Posons $B = \{e\} \cup \{e d z e \mid d \in D\}$. Alors B est une base de l'espace vectoriel sous-jacent à A_α . En particulier, on a

$$\dim_{\mathbb{C}}(A_{\alpha}) = q \quad \text{et donc} \quad \dim_{\mathbb{C}}(A) = q(q-1);$$

cela correspond bien aux résultats plus généraux de [9] et [11].

L'élément e est l'unité de l'algèbre A_{α} , dans la suite on le désignera aussi par 1; pour tout $a \in F^{\times}$, on pose

$$b(a) = e d(a) z e.$$

On définit le symbole de Kronecker δ pour $a \in F^{\times}$ par

$$\delta(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1, \\ 0 & \text{si } a \neq 1. \end{cases}$$

PROPOSITION 1. *L'unité et les éléments $b(a)$, avec $a \in F^{\times}$, forment une base de l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre A_{α} . La structure d'algèbre s'exprime par la relation suivante :*

$$(4) \quad \begin{aligned} & b(a_1)b(a_2) \\ &= q^{-1} \delta(a_1 a_2^{-1}) \alpha(a_1) + q^{-1} \sum_a \psi(a(a_1 + a_2) - a^{-1}) \alpha(a^{-1}) b(-a^2 a_1 a_2), \end{aligned}$$

où l'on somme sur tous les $a \in F^{\times}$ et où $a_1, a_2 \in F^{\times}$.

En effet, on a, pour $a_1, a_2 \in F^{\times}$,

$$\begin{aligned} b(a_1)b(a_2) &= ed(a_1)z ed(a_2)ze = ed(a_1)ze_{\lambda}d(a_2)ze \\ &= q^{-1} \sum_b ed(a_1)z\psi(-b)u(b)d(a_2)ze \quad (b \in F_q^+) \\ &= q^{-1} ec(a_2)d(a_1 a_2^{-1})e + q^{-1} \sum_a \psi(-a) ed(a_1)zu(a)d(a_2)ze, \end{aligned}$$

$a \in F^{\times}$. Mais $c(a_2)e_{\alpha} = \alpha(a_2)e_{\alpha}$ et

$$d(a_1)zu(a)d(a_2)z = c(a)u(a^{-1}a_1)d(-a^2 a_1 a_2)zu(a^{-1}a_2);$$

d'après (2) et (3). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & b(a_1)b(a_2) \\ &= q^{-1} \delta(a_1^{-1} a_2) \alpha(a_1) + q^{-1} \sum_a \psi(-a + a^{-1}(a_1 + a_2)) \alpha(a) ed(-a^{-2} a_1 a_2) ze \\ &= q^{-1} \delta(a_1^{-1} a_2) \alpha(a_1) + q^{-1} \sum_a \psi(a(a_1 + a_2) - a^{-1}) \alpha(a^{-1}) b(-a^2 a_1 a_2), \end{aligned}$$

où l'on somme sur $a \in F^{\times}$.

C.Q.F.D.

On remarque en particulier que l'algèbre A est commutative, ce qui correspond bien à la théorie générale, c.f. [9], [11].

Par une « transformation de Mellin », on introduit de nouveaux générateurs $b(\gamma)$ de A_α : on pose

$$b(\gamma) = (q-1)^{-1} \sum_a \gamma(a)b(a), \quad a \in F^\times, \gamma \in X.$$

On a la formule d'inversion

$$b(a) = \sum_\gamma \gamma(a^{-1}) b(\gamma)$$

où l'on somme sur $\gamma \in X$.

La relation (4) se transforme de la manière suivante:

$$\begin{aligned} & b(\gamma_1)(\gamma_2) \\ &= (q-1)^{-2} \sum_{a_1, a_2} \gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2) b(a_1)b(a_2), \quad a_1, a_2 \in F^\times, \\ &= q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_a (\alpha\gamma_1\gamma_2)(a) \\ &+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2} \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})\gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2)b(-a^2a_1a_2) \\ &= q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\ &+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2, \gamma} \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})\gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2)\gamma(-a^{-2}a_1^{-1}a_2^{-1})b(\gamma) \\ &= q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\ &+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2, \gamma} \psi(a_1+a_2+a) (\alpha\gamma\gamma_1\gamma_2)(-1) \\ &\quad (\alpha\gamma_1\gamma_2)(a) (\gamma_1\gamma^{-1})(a_1) (\gamma_2\gamma^{-1})(a_2)b(\gamma) \\ &= q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\ &+ q^{-1}(q-1)^{-2} (\alpha\gamma_1\gamma_2)(-1)g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_\gamma \gamma(-1)g(\gamma_1\gamma^{-1})g(\gamma_2\gamma^{-1})b(\gamma); \end{aligned}$$

ici l'on somme sur $a, a_1, a_2 \in F^\times$ et $\gamma \in X$. Le symbole de Kronecker δ est défini, pour $\beta \in X$, par

$$\delta(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 1, \\ 0 & \text{si } \beta \neq 1. \end{cases}$$

La somme de Gauss $g(\beta)$ est définie, pour tout $\beta \in X$, par

$$g(\beta) = \sum_a \psi(a) \beta(a), \quad a \in F^\times.$$

Le résultat des calculs ci-dessus s'énonce maintenant sous la forme suivante:

THÉORÈME 1. *L'unité et les éléments $b(\gamma)$, avec $\gamma \in X$, forment une base de l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre A_x . La structure d'algèbre s'exprime par la relation suivante :*

$$(5) \quad b(\gamma_1) b(\gamma_2) = q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha\gamma_1 \gamma_2) + q^{-1}(q-1)^{-2} (\alpha\gamma_1\gamma_2) (-1) g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_{\gamma} \gamma(-1) g(\gamma_1\gamma^{-1})g(\gamma_2\gamma^{-1})b(\gamma)$$

pour $\gamma_1, \gamma_2 \in X$; on somme sur $\gamma \in X$.

§ 4. RAPPEL DE LA TABLE DES CARACTÈRES DE G

CALCUL DES VALEURS DES CARACTÈRES DE G SUR LES GÉNÉRATEURS DE A_x

Les caractères sont en « dualité » avec les classes de conjugaison. Correspondant aux quatre « types » de telles classes, il y a quatre « séries » de caractères. Toute la situation se résume dans le tableau suivant :

classes de conjugaison		caractères	χ_{μ}^1	χ_{μ}^q	$\chi_{\mu, \nu}$	χ_{Λ}
représentant	diviseurs élémentaires	paramètres	$\mu \in X$	$\mu \in X$	$\mu, \nu \in X$ $\mu \neq \nu$ modulo $(\mu, \nu) \sim (\nu, \mu)$	$\Lambda \in Y$ modulo $\Lambda \sim \Lambda^q$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$X-a$ $X-a$	$a \in F^{\times}$	$\mu^2(a)$	$q \mu^2(a)$	$(q+1) \mu\nu(a)$	$(q-1) \Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$	1 $(X-a)^2$	$a \in F^{\times}$	$\mu^2(a)$	0	$\mu\nu(a)$	$-\Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$	1 $(X-a)(X-d)$	$a, d \in F^{\times}$ $a \neq d$ modulo $(a, d) \sim (d, a)$	$\mu(ad)$	$\mu(ad)$	$\mu(a) \nu(d)$ $+ \mu(d) \nu(a)$	0
$\begin{pmatrix} 0 & N(x) \\ -1 & \text{Tr}(x) \end{pmatrix}$	1 $X^2 - \text{Tr}(x)X + N(x)$	$x \in E^{\times}$ $x \notin F^{\times}$ modulo $x \sim x^q$	$\mu(N(x))$	$-\mu(N(x))$	0	$-(\Lambda + \Lambda^q)(x)$