i.e. les $e_\alpha, \alpha \in X$, forment un système d'idempotents, deux à deux orthogonaux, de somme 1. Chaque e_α, $\alpha \in X$, est un idempotent central, i.e. e_α est dans le centre de l'algèbre du groupe. Posons

$$H = CU\,.$$

On définit un caractère $\alpha\lambda$ de H par

$$(\alpha\lambda)(cu) = \alpha(c)\,\lambda(u), \quad \text{pour} \quad c \in C, u \in U\,.$$

Posons

$$V_\alpha = \mathrm{Ind}_H^G(\alpha\lambda), \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in X\,;$$

cette représentation induite se réalise dans l'idéal à gauche $\mathbf{C}[G]\,e_\alpha\,e_\lambda$ et l'on a

$$V = \bigoplus_{\alpha\in X} V_\alpha\,.$$

L'algèbre d'entrelacement A_α de V_α s'identifie à l'algèbre $e_\alpha e_\lambda \mathbf{C}[G] e_\alpha e_\lambda$ qui est égale à $e_\lambda \mathbf{C}[G] e_\alpha e_\lambda$, d'où

$$A = \bigoplus_{\alpha\in X} A_\alpha\,.$$

Dans la suite, on se fixe un caractère central α et l'on étudie l'algèbre A_α.

§ 3. Description de A_α en termes de générateurs et relations

Posons $e = e_\theta$ avec $\theta = \alpha\lambda$, on a alors $A_\alpha = e\,\mathbf{C}[G]\,e = \mathrm{End}_G(\mathrm{Ind}_H^G(\theta))$. Soit R un système de représentants des doubles classes de G suivant H. On sait que l'ensemble

$$B = \{ere \mid r \in R, ere \neq 0\}$$

forme une base de A_α en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. Pour $h, h' \in H$, $r \in R$, l'on a

$$e\,hrh'e = \theta(hh')\,ere\,.$$

Pour tout $g \in G$, on définit un caractère $g\theta$ de $g\,H\,g^{-1}$ par $(g\theta)(x) = \theta(g^{-1}xg)$, si $x \in g\,Hg^{-1}$. On sait que, pour tout $g \in G$, la condition $ege \neq 0$ équivaut à

$$\theta/_{H\cap gHg^{-1}} = g\,\theta/_{H\cap gHg^{-1}}\,.$$

Rappelons que

$$u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pour} \quad b \in F^+, c(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \text{pour} \quad a \in F^\times ,$$

$U = \{u(b) \mid b \in F^+\}$ et $C = \{c(a) \mid a \in F^\times\}$ et introduisons, en plus, les notations suivantes:

$$d(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pour} \quad a \in F^\times, D = \{d(a) \mid a \in F^\times\} \quad \text{et} \quad z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a la décomposition de Bruhat

$$G = C\,U\,D \;\cup\; C\,U\,D\,z\,U \tag{1}$$

et on vérifie facilement qu'on a, parmi d'autres, les relations suivantes,

$$d(a)\,u(b) = u(ab)\,d(a), a \in F^\times, b \in F^+ , \tag{2}$$

$$z\,u(a)\,z = c(a)\,d(-a^{-2})\,u(-a)\,z\,u(a^{-1}), a \in F^\times , \tag{3}$$

qui nous servirons dans la suite.

La réunion de D et Dz forme un système de représentants des doubles classes de G suivant $H = CU$, comme on le remarque à l'aide de (1). On calcule

$$\begin{aligned} (d(a)\theta)\,(c\,u(b)) &= \theta(d(a^{-1})\,c\,u(b)d(a)) \\ &= \theta(c\,u(a^{-1}b)), \qquad \text{d'après (2)}, \\ &= \alpha(c)\,\psi(a^{-1}b)\,, \end{aligned}$$

pour $a \in F^\times, c \in C$ et $b \in F^+$. Or $d\,H\,d^{-1} = H$, pour tout $d \in D$ et le calcul précédent montre que, pour $d \in D$,

$$\theta/_H = d\theta/_H \quad \text{si et seulement si} \quad d = 1\,.$$

Pour $d \in D$, on a donc $ede \neq 0$, si et seulement si $d = 1$. Examinons maintenant le cas d'un représentant $r \in Dz$; on a $r = d(a)z$, avec $a \in F^\times$, et

$$r\,H\,r^{-1} = d(a)z\,CU\,zd(a^{-1}) = C\,z\,U\,z = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\, a \in F^\times, b \in F^+ \right\},$$

d'où

$$H \cap r\,H\,r^{-1} = C\,.$$

Mais $\theta/_C = dz\,\theta/_C$ pour tout $d \in D$. On a donc $edze \neq 0$, pour tout $d \in D$. Posons $B = \{e\} \cup \{e\,dze \mid d \in D\}$. Alors B est une base de l'espace vectoriel sous-jacent à A_α. En particulier, on a

$$\dim_{\mathbf{C}}(A_\alpha) = q \quad \text{et donc} \quad \dim_{\mathbf{C}}(A) = q(q-1)\,;$$

cela correspond bien aux résultats plus généraux de [9] et [11].

L'élément e est l'unité de l'algèbre A_α, dans la suite on le désignera aussi par 1; pour tout $a \in F^\times$, on pose

$$b(a) = e\,d(a)\,z\,e\,.$$

On définit le symbole de Kronecker δ pour $a \in F^\times$ par

$$\delta(a) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a = 1\,, \\ 0 & \text{si} \quad a \neq 1\,. \end{cases}$$

Proposition 1. *L'unité et les éléments* $b(a)$, *avec* $a \in F^\times$, *forment une base de l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre* A_α. *La structure d'algèbre s'exprime par la relation suivante:*

(4)
$$b(a_1)b(a_2) = q^{-1}\,\delta(a_1 a_2^{-1})\,\alpha(a_1) + q^{-1}\sum_a \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})b(-a^2 a_1 a_2)\,,$$

où l'on somme sur tous les $a \in F^\times$ *et où* $a_1, a_2 \in F^\times$.

En effet, on a, pour $a_1, a_2 \in F^\times$,

$$\begin{aligned} b(a_1)b(a_2) &= ed(a_1)z\,ed(a_2)ze = ed(a_1)ze_\lambda d(a_2)ze \\ &= q^{-1}\sum_b ed(a_1)z\psi(-b)u(b)d(a_2)ze \quad (b \in F_q^+) \\ &= q^{-1}ec(a_2)d(a_1\,a_2^{-1})e + q^{-1}\sum_a \psi(-a)\,ed(a_1)zu(a)d(a_2)ze\,, \end{aligned}$$

$a \in F^\times$. Mais $c(a_2)e_\alpha = \alpha(a_2)e_\alpha$ et

$$d(a_1)zu(a)d(a_2)z = c(a)u(a^{-1}a_1)d(-a^2 a_1 a_2)zu(a^{-1}a_2)\,,$$

d'après (2) et (3). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} b(a_1)b(a_2) &= q^{-1}\,\delta(a_1^{-1}a_2)\alpha(a_1) + q^{-1}\sum_a \psi(-a+a^{-1}(a_1+a_2))\alpha(a)ed(-a^{-2}a_1a_2)ze \\ &= q^{-1}\,\delta(a_1^{-1}\,a_2)\alpha(a_1) + q^{-1}\sum_a \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})b(-a^2 a_1 a_2)\,, \end{aligned}$$

où l'on somme sur $a \in F^\times$. C.Q.F.D.

On remarque en particulier que l'algèbre A est commutative, ce qui correspond bien à la théorie générale, c.f. [9], [11].

Par une « transformation de Mellin », on introduit de nouveaux générateurs $b(\gamma)$ de A_α: on pose

$$b(\gamma) = (q-1)^{-1} \sum_a \gamma(a) b(a),\ a \in F^\times, \gamma \in X.$$

On a la formule d'inversion

$$b(a) = \sum_\gamma \gamma(a^{-1})\, b(\gamma)$$

où l'on somme sur $\gamma \in X$.

La relation (4) se transforme de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
&b(\gamma_1)(\gamma_2)\\
&= (q-1)^{-2} \sum_{a_1, a_2} \gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2)\, b(a_1) b(a_2), \quad a_1, a_2 \in F^\times,\\
&= q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_a (\alpha\gamma_1\gamma_2)(a)\\
&+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2} \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})\gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2) b(-a^2 a_1 a_2)\\
&= q^{-1}(q-1)^{-1}\, \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2)\\
&+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2, \gamma} \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})\gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2)\gamma(-a^{-2}a_1^{-1}a_2^{-1}) b(\gamma)\\
&= q^{-1}(q-1)^{-1}\, \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2)\\
&+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2, \gamma} \psi(a_1+a_2+a)\,(\alpha\gamma\gamma_1\gamma_2)(-1)\\
&\quad (\alpha\gamma_1\gamma_2)(a)\,(\gamma_1\gamma^{-1})(a_1)\,(\gamma_2\gamma^{-1})(a_2) b(\gamma)\\
&= q^{-1}(q-1)^{-1}\, \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2)\\
&+ q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1\gamma_2)(-1) g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_\gamma \gamma(-1) g(\gamma_1\gamma^{-1}) g(\gamma_2\gamma^{-1}) b(\gamma)\,;
\end{aligned}$$

ici l'on somme sur $a, a_1, a_2 \in F^\times$ et $\gamma \in X$. Le symbole de Kronecker δ est défini, pour $\beta \in X$, par

$$\delta(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \beta = 1, \\ 0 & \text{si} \quad \beta \neq 1. \end{cases}$$

La somme de Gauss $g(\beta)$ est définie, pour tout $\beta \in X$, par

$$g(\beta) = \sum_a \psi(a)\, \beta(a),\ a \in F^\times.$$

Le résultat des calculs ci-dessus s'énonce maintenant sous la forme suivante:

THÉORÈME 1. *L'unité et les éléments* $b(\gamma)$, *avec* $\gamma \in X$, *forment une base de l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre* A_α. *La structure d'algèbre s'exprime par la relation suivante :*

$$b(\gamma_1)\, b(\gamma_2) = q^{-1}(q-1)^{-1}\, \delta(\alpha\gamma_1 \gamma_2) + q^{-1}(q-1)^{-2}\, (\alpha\gamma_1\gamma_2)(-1)\, g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_{\gamma} \gamma(-1)\, g(\gamma_1\gamma^{-1}) g(\gamma_2\gamma^{-1}) b(\gamma) \tag{5}$$

pour $\gamma_1, \gamma_2 \in X$; *on somme sur* $\gamma \in X$.

§ 4. RAPPEL DE LA TABLE DES CARACTÈRES DE G CALCUL DES VALEURS DES CARACTÈRES DE G SUR LES GÉNÉRATEURS DE A_α

Les caractères sont en « dualité » avec les classes de conjugaison. Correspondant aux quatre « types » de telles classes, il y a quatre « séries » de caractères. Toute la situation se résume dans le tableau suivant :

classes de conjugaison		caractères	χ_μ^1	χ_μ^q	$\chi_{\mu,\upsilon}$	χ_Λ
représentant	diviseurs élémentaires	paramètres	$\mu \in X$	$\mu \in X$	$\mu, \upsilon \in X$ $\mu \neq \upsilon$ modulo $(\mu, \upsilon) \sim (\upsilon, \mu)$	$\Lambda \in Y$ modulo $\Lambda \sim \Lambda^q$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$X-a$ $X-a$	$a \in F^\times$	$\mu^2(a)$	$q\,\mu^2(a)$	$(q+1)\,\mu\upsilon(a)$	$(q-1)\,\Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$	1 $(X-a)^2$	$a \in F^\times$	$\mu^2(a)$	0	$\mu\upsilon(a)$	$-\Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$	1 $(X-a)(X-d)$	$a, d \in F^\times$ $a \neq d$ modulo $(a, d) \sim (d, a)$	$\mu(ad)$	$\mu(ad)$	$\mu(a)\,\upsilon(d)$ $+\,\mu(d)\,\upsilon(a)$	0
$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{N}(x) \\ -1 & \mathrm{Tr}(x) \end{pmatrix}$	1 $X^2 - \mathrm{Tr}(x)X + \mathrm{N}(x)$	$x \in E^\times$ $x \notin F^\times$ modulo $x \sim x^q$	$\mu(\mathrm{N}(x))$	$-\mu(\mathrm{N}(x))$	0	$-(\Lambda+\Lambda^q)(x)$