

# REPRÉSENTATION DE GELFAND-GRAEV ET IDENTITÉS DE BARNES LE CAS DE $GL_2$ D'UN CORPS FINI

Autor(en): **Helversen-Pasotto, Anna**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-55078>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

REPRÉSENTATION DE GELFAND-GRAEV  
ET IDENTITÉS DE BARNES  
LE CAS DE  $GL_2$  D'UN CORPS FINI

par Anna HELVERSEN-PASOTTO

§ 1. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'expliquer comment l'étude de la représentation de Gelfand-Graev du groupe  $GL_2$  d'un corps fini nous a amenés aux identités de Barnes (i) et (iv) de notre publication [4] de 1978. Une autre approche — par modèles de Weil — a été trouvée par J. Soto Andrade en 1979 et est publiée dans [7]. Cette dernière a été adaptée au cas d'un corps local non-archimédien par W. Li, c.f. [8].

Voici une description de notre méthode: Soit  $F$  le corps fini à  $q$  éléments et  $G = GL(2, F)$  le groupe général linéaire des  $2 \times 2$  matrices inversibles à coefficients dans  $F$ . Pour  $b \in F$ , posons

$$u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \{u(b) \mid b \in F\}.$$

Soit  $\psi$  un caractère additif non-trivial de  $F$  à valeurs complexes. On pose  $\lambda(u(b)) = \psi(b)$ , pour tout  $b \in F$ , et

$$V = \text{Ind}_U^G(\lambda);$$

cette représentation induite porte le nom de « représentation de Gelfand-Graev » dans un cadre plus général, c.f. [9] et [11], et l'on sait que son algèbre d'entrelacement  $A = \text{End}_G(V)$  est commutative; elle s'identifie à une sous-algèbre de l'algèbre du groupe  $\mathbb{C}[G]$ ; ici  $\mathbb{C}$  désigne le corps des nombres complexes.

Nous décomposons l'algèbre  $A$ , suivant les caractères centraux de  $G$ , en somme directe de  $q - 1$  sous-algèbres  $A_\alpha$  et nous déterminons la structure de chaque composante en termes de générateurs et relations; ceci met d'ailleurs la commutativité en évidence. Une première description est donnée

en proposition 1, ici les générateurs sont paramétrés par les éléments du groupe multiplicatif du corps  $F$ .

Par une « transformation de Mellin », nous introduisons de nouveaux générateurs, paramétrés par les caractères multiplicatifs du corps  $F$ . La structure de l'algèbre  $A_\alpha$  est donnée par un seul type de relations (5), c.f. théorème 1.

La table des caractères du groupe  $G$  nous permet de déterminer les homomorphismes d'algèbres de  $A_\alpha$  dans  $\mathbf{C}$ ; les relations (5) donnent ainsi lieu à des identités de sommes de Gauss; la série principale (resp. discrète) amène à l'identité (i) (resp. (iv)) de notre publication [4].

Dans une deuxième partie de ce travail (§§ 5 et 6) nous changeons de point de vue:

La démonstration directe des identités (i) et (iv) de notre publication [4], nous permet de nous « débarrasser » de l'usage de la table des caractères de  $G$ . Nous parachutons la définition de certains « homomorphismes » en donnant leurs valeurs sur les générateurs et nous démontrons qu'il s'agit effectivement d'homomorphismes d'algèbres de  $A$  dans  $\mathbf{C}$  en vérifiant que la relation (5) est respectée, ce qui revient à utiliser les identités de Barnes (i) et (iv).

Un calcul de la trace de  $A_\alpha$  nous permet ensuite de prouver que les homomorphismes ainsi obtenus constituent une liste complète et sans répétitions des homomorphismes d'algèbres de  $A_\alpha$  dans  $\mathbf{C}$ .

Une méthode partiellement analogue a été appliquée au cas de  $GL(3, F)$  par B. Chang dans [1]. L'auteur détermine des générateurs et relations pour l'algèbre d'entrelacement  $A_3$  de la représentation de Gelfand-Graev de  $GL(3, F)$ , mais n'introduit pas de transformation de Mellin dans la suite. Il utilise la table des caractères de  $GL(3, F)$  pour déterminer les homomorphismes d'algèbres de  $A_3$  dans  $\mathbf{C}$ .

Les relations sont vérifiées avec beaucoup de calculs, derrière lesquels se cachent sans doute des identités.

Une méthode différente a été appliquée au cas de  $GL(3, F)$  dans ma publication [6] qui ne concerne que le cas de la série discrète. Une transformation de Mellin a été utilisée dans une situation différente, ce qui fait apparaître des identités de sommes de Gauss « du type de Barnes » pour la dimension trois. Ces identités devraient implicitement être contenues dans la partie des calculs de Chang concernant la série discrète.

Comme en témoignent plus en détail les introductions de [4], [5] et [6], une grande partie des idées sous-jacentes à ce travail est due à P. Cartier.

§ 2. REPRÉSENTATION DE GELFAND-GRAEV DE  $G$   
ET DÉCOMPOSITION DE SON ALGÈBRE D'ENTRELAACEMENT  $A$   
SUIVANT LES CARACTÈRES CENTRAUX DE  $G$

Nous gardons les notations de l'introduction,  $F$  désigne le corps fini à  $q$  éléments,  $F^\times$  (resp.  $F^+$ ) désigne le groupe multiplicatif (resp. additif) de  $F$  et  $G = GL(2, F)$ . Nous fixons, une fois pour toutes, un caractère non-trivial  $\psi$  de  $F^+$ . La représentation de Gelfand-Graev  $V$  de  $G$  est définie par

$$V = \text{Ind}_U^G(\lambda),$$

où  $U = \{u(b) \mid b \in F^+\}$ ,  $u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , pour  $b \in F$ , et  $\lambda(u(b)) = \psi(b)$ , pour tout  $b \in F$ . Nous allons étudier la structure de l'algèbre d'entrelacement  $A = \text{End}_G(V)$ . A ce propos, il est commode de travailler avec des idempotents dans l'algèbre  $\mathbb{C}[G]$  du groupe  $G$ .

Posons  $e_\lambda := q^{-1} \sum_{u \in U} \lambda(u^{-1})u$ . On a  $e_\lambda^2 = e_\lambda$  et  $u e_\lambda = \lambda(u)e_\lambda = e_\lambda u$ , pour tout  $u \in U$ . La représentation induite  $V$  se réalise dans l'idéal à gauche  $\mathbb{C}[G]e_\lambda$  engendré par l'idempotent  $e_\lambda$  et l'algèbre d'entrelacement  $A$  s'identifie à la sous-algèbre  $e_\lambda \mathbb{C}[G]e_\lambda$  de l'algèbre du groupe.

Soit  $X$  le groupe des caractères de  $F^\times$ . Pour  $\alpha \in X$ , on définit un caractère du centre  $C$  de  $G$ , qu'on désignera par le même symbole  $\alpha$ , en posant

$$c(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha(c(a)) = \alpha(a), \quad \text{pour } a \in F^\times.$$

Posons

$$e_\alpha := (q-1)^{-1} \sum_{c \in C} \alpha(c^{-1})c, \quad \text{pour } \alpha \in X.$$

On remarque que

$$e_\alpha^2 = e_\alpha, e_\alpha e_{\alpha'} = 0, \quad \text{si } \alpha \neq \alpha', \alpha, \alpha' \in X$$

et que

$$\sum_{\alpha \in X} e_\alpha = 1;$$

i.e. les  $e_\alpha, \alpha \in X$ , forment un système d'idempotents, deux à deux orthogonaux, de somme 1. Chaque  $e_\alpha, \alpha \in X$ , est un idempotent central, i.e.  $e_\alpha$  est dans le centre de l'algèbre du groupe. Posons

$$H = CU.$$

On définit un caractère  $\alpha\lambda$  de  $H$  par

$$(\alpha\lambda)(cu) = \alpha(c)\lambda(u), \quad \text{pour } c \in C, u \in U.$$

Posons

$$V_\alpha = \text{Ind}_H^G(\alpha\lambda), \quad \text{pour tout } \alpha \in X;$$

cette représentation induite se réalise dans l'idéal à gauche  $C[G]e_\alpha e_\lambda$  et l'on a

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X} V_\alpha.$$

L'algèbre d'entrelacement  $A_\alpha$  de  $V_\alpha$  s'identifie à l'algèbre  $e_\alpha e_\lambda C[G] e_\alpha e_\lambda$  qui est égale à  $e_\lambda C[G] e_\alpha e_\lambda$ , d'où

$$A = \bigoplus_{\alpha \in X} A_\alpha.$$

Dans la suite, on se fixe un caractère central  $\alpha$  et l'on étudie l'algèbre  $A_\alpha$ .

### § 3. DESCRIPTION DE $A_\alpha$ EN TERMES DE GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

Posons  $e = e_\theta$  avec  $\theta = \alpha\lambda$ , on a alors  $A_\alpha = e C[G] e = \text{End}_G(\text{Ind}_H^G(\theta))$ . Soit  $R$  un système de représentants des doubles classes de  $G$  suivant  $H$ . On sait que l'ensemble

$$B = \{ere \mid r \in R, ere \neq 0\}$$

forme une base de  $A_\alpha$  en tant qu'espace vectoriel sur  $C$ . Pour  $h, h' \in H, r \in R$ , l'on a

$$e h r h' e = \theta(hh') ere.$$

Pour tout  $g \in G$ , on définit un caractère  $g\theta$  de  $g H g^{-1}$  par  $(g\theta)(x) = \theta(g^{-1}xg)$ , si  $x \in g H g^{-1}$ . On sait que, pour tout  $g \in G$ , la condition  $ege \neq 0$  équivaut à

$$\theta_{/H \cap g H g^{-1}} = g \theta_{/H \cap g H g^{-1}}.$$

Rappelons que

$$u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pour } b \in F^+, c(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ pour } a \in F^\times,$$

$U = \{u(b) \mid b \in F^+\}$  et  $C = \{c(a) \mid a \in F^\times\}$  et introduisons, en plus, les notations suivantes:

$$d(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pour } a \in F^\times, D = \{d(a) \mid a \in F^\times\} \text{ et } z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a la décomposition de Bruhat

$$(1) \quad G = C U D \cup C U D z U$$

et on vérifie facilement qu'on a, parmi d'autres, les relations suivantes,

$$(2) \quad d(a) u(b) = u(ab) d(a), \quad a \in F^\times, b \in F^+,$$

$$(3) \quad z u(a) z = c(a) d(-a^{-2}) u(-a) z u(a^{-1}), \quad a \in F^\times,$$

qui nous servirons dans la suite.

La réunion de  $D$  et  $Dz$  forme un système de représentants des doubles classes de  $G$  suivant  $H = CU$ , comme on le remarque à l'aide de (1). On calcule

$$\begin{aligned} (d(a)\theta)(c u(b)) &= \theta(d(a^{-1}) c u(b) d(a)) \\ &= \theta(c u(a^{-1}b)), \quad \text{d'après (2),} \\ &= \alpha(c) \psi(a^{-1}b), \end{aligned}$$

pour  $a \in F^\times, c \in C$  et  $b \in F^+$ . Or  $d H d^{-1} = H$ , pour tout  $d \in D$  et le calcul précédent montre que, pour  $d \in D$ ,

$$\theta/H = d\theta/H \quad \text{si et seulement si} \quad d = 1.$$

Pour  $d \in D$ , on a donc  $ede \neq 0$ , si et seulement si  $d = 1$ . Examinons maintenant le cas d'un représentant  $r \in Dz$ ; on a  $r = d(a)z$ , avec  $a \in F^\times$ , et

$$r H r^{-1} = d(a)z C U z d(a^{-1}) = C z U z = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a \in F^\times, b \in F^+ \right\},$$

d'où

$$H \cap r H r^{-1} = C.$$

Mais  $\theta/c = dz \theta/c$  pour tout  $d \in D$ . On a donc  $edze \neq 0$ , pour tout  $d \in D$ . Posons  $B = \{e\} \cup \{e dze \mid d \in D\}$ . Alors  $B$  est une base de l'espace vectoriel sous-jacent à  $A_\alpha$ . En particulier, on a

$$\dim_{\mathbb{C}}(A_{\alpha}) = q \quad \text{et donc} \quad \dim_{\mathbb{C}}(A) = q(q-1);$$

cela correspond bien aux résultats plus généraux de [9] et [11].

L'élément  $e$  est l'unité de l'algèbre  $A_{\alpha}$ , dans la suite on le désignera aussi par 1; pour tout  $a \in F^{\times}$ , on pose

$$b(a) = e d(a) z e.$$

On définit le symbole de Kronecker  $\delta$  pour  $a \in F^{\times}$  par

$$\delta(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1, \\ 0 & \text{si } a \neq 1. \end{cases}$$

PROPOSITION 1. *L'unité et les éléments  $b(a)$ , avec  $a \in F^{\times}$ , forment une base de l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre  $A_{\alpha}$ . La structure d'algèbre s'exprime par la relation suivante :*

$$(4) \quad \begin{aligned} & b(a_1)b(a_2) \\ &= q^{-1} \delta(a_1 a_2^{-1}) \alpha(a_1) + q^{-1} \sum_a \psi(a(a_1 + a_2) - a^{-1}) \alpha(a^{-1}) b(-a^2 a_1 a_2), \end{aligned}$$

où l'on somme sur tous les  $a \in F^{\times}$  et où  $a_1, a_2 \in F^{\times}$ .

En effet, on a, pour  $a_1, a_2 \in F^{\times}$ ,

$$\begin{aligned} b(a_1)b(a_2) &= ed(a_1)z ed(a_2)ze = ed(a_1)ze_{\lambda}d(a_2)ze \\ &= q^{-1} \sum_b ed(a_1)z\psi(-b)u(b)d(a_2)ze \quad (b \in F_q^+) \\ &= q^{-1} ec(a_2)d(a_1 a_2^{-1})e + q^{-1} \sum_a \psi(-a) ed(a_1)zu(a)d(a_2)ze, \end{aligned}$$

$a \in F^{\times}$ . Mais  $c(a_2)e_{\alpha} = \alpha(a_2)e_{\alpha}$  et

$$d(a_1)zu(a)d(a_2)z = c(a)u(a^{-1}a_1)d(-a^2 a_1 a_2)zu(a^{-1}a_2);$$

d'après (2) et (3). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & b(a_1)b(a_2) \\ &= q^{-1} \delta(a_1^{-1} a_2) \alpha(a_1) + q^{-1} \sum_a \psi(-a + a^{-1}(a_1 + a_2)) \alpha(a) ed(-a^{-2} a_1 a_2) ze \\ &= q^{-1} \delta(a_1^{-1} a_2) \alpha(a_1) + q^{-1} \sum_a \psi(a(a_1 + a_2) - a^{-1}) \alpha(a^{-1}) b(-a^2 a_1 a_2), \end{aligned}$$

où l'on somme sur  $a \in F^{\times}$ .

C.Q.F.D.

On remarque en particulier que l'algèbre  $A$  est commutative, ce qui correspond bien à la théorie générale, c.f. [9], [11].

Par une « transformation de Mellin », on introduit de nouveaux générateurs  $b(\gamma)$  de  $A_\alpha$ : on pose

$$b(\gamma) = (q-1)^{-1} \sum_a \gamma(a)b(a), \quad a \in F^\times, \gamma \in X.$$

On a la formule d'inversion

$$b(a) = \sum_\gamma \gamma(a^{-1}) b(\gamma)$$

où l'on somme sur  $\gamma \in X$ .

La relation (4) se transforme de la manière suivante:

$$\begin{aligned} & b(\gamma_1)(\gamma_2) \\ &= (q-1)^{-2} \sum_{a_1, a_2} \gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2) b(a_1)b(a_2), \quad a_1, a_2 \in F^\times, \\ &= q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_a (\alpha\gamma_1\gamma_2)(a) \\ &+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2} \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})\gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2)b(-a^2a_1a_2) \\ &= q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\ &+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2, \gamma} \psi(a(a_1+a_2)-a^{-1})\alpha(a^{-1})\gamma_1(a_1)\gamma_2(a_2)\gamma(-a^{-2}a_1^{-1}a_2^{-1})b(\gamma) \\ &= q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\ &+ q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, a_2, \gamma} \psi(a_1+a_2+a) (\alpha\gamma\gamma_1\gamma_2)(-1) \\ &\quad (\alpha\gamma_1\gamma_2)(a) (\gamma_1\gamma^{-1})(a_1) (\gamma_2\gamma^{-1})(a_2)b(\gamma) \\ &= q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\ &+ q^{-1}(q-1)^{-2} (\alpha\gamma_1\gamma_2)(-1)g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_\gamma \gamma(-1)g(\gamma_1\gamma^{-1})g(\gamma_2\gamma^{-1})b(\gamma); \end{aligned}$$

ici l'on somme sur  $a, a_1, a_2 \in F^\times$  et  $\gamma \in X$ . Le symbole de Kronecker  $\delta$  est défini, pour  $\beta \in X$ , par

$$\delta(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 1, \\ 0 & \text{si } \beta \neq 1. \end{cases}$$

La somme de Gauss  $g(\beta)$  est définie, pour tout  $\beta \in X$ , par

$$g(\beta) = \sum_a \psi(a) \beta(a), \quad a \in F^\times.$$

Le résultat des calculs ci-dessus s'énonce maintenant sous la forme suivante:



THÉORÈME 1. *L'unité et les éléments  $b(\gamma)$ , avec  $\gamma \in X$ , forment une base de l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre  $A_x$ . La structure d'algèbre s'exprime par la relation suivante :*

$$(5) \quad b(\gamma_1) b(\gamma_2) = q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha\gamma_1 \gamma_2) + q^{-1}(q-1)^{-2} (\alpha\gamma_1\gamma_2) (-1) g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_{\gamma} \gamma(-1) g(\gamma_1\gamma^{-1})g(\gamma_2\gamma^{-1})b(\gamma)$$

pour  $\gamma_1, \gamma_2 \in X$ ; on somme sur  $\gamma \in X$ .

§ 4. RAPPEL DE LA TABLE DES CARACTÈRES DE G

CALCUL DES VALEURS DES CARACTÈRES DE G SUR LES GÉNÉRATEURS DE  $A_x$

Les caractères sont en « dualité » avec les classes de conjugaison. Correspondant aux quatre « types » de telles classes, il y a quatre « séries » de caractères. Toute la situation se résume dans le tableau suivant :

classes de conjugaison		caractères	$\chi_{\mu}^1$	$\chi_{\mu}^q$	$\chi_{\mu, \nu}$	$\chi_{\Lambda}$
représentant	diviseurs élémentaires	paramètres	$\mu \in X$	$\mu \in X$	$\mu, \nu \in X$ $\mu \neq \nu$ modulo $(\mu, \nu) \sim (\nu, \mu)$	$\Lambda \in Y$ modulo $\Lambda \sim \Lambda^q$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$X-a$ $X-a$	$a \in F^{\times}$	$\mu^2(a)$	$q \mu^2(a)$	$(q+1) \mu\nu(a)$	$(q-1) \Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$1$ $(X-a)^2$	$a \in F^{\times}$	$\mu^2(a)$	0	$\mu\nu(a)$	$-\Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$	$1$ $(X-a)(X-d)$	$a, d \in F^{\times}$ $a \neq d$ modulo $(a, d) \sim (d, a)$	$\mu(ad)$	$\mu(ad)$	$\mu(a) \nu(d)$ $+ \mu(d) \nu(a)$	0
$\begin{pmatrix} 0 & N(x) \\ -1 & \text{Tr}(x) \end{pmatrix}$	$1$ $X^2 - \text{Tr}(x)X + N(x)$	$x \in E^{\times}$ $x \notin F^{\times}$ modulo $x \sim x^q$	$\mu(N(x))$	$-\mu(N(x))$	0	$-(\Lambda + \Lambda^q)(x)$

Ici  $E$  désigne le corps fini à  $q^2$  éléments,  $\text{Tr}$  (resp.  $N$ ) dénote la trace (resp. norme) de  $E$  sur  $F$ , i.e. pour  $x \in E$ , on a

$$\text{Tr}(x) = x + x^q \quad \text{et} \quad N(x) = x x^q,$$

$Y$  désigne le groupe des caractères de  $E^\times$ .

Une des nombreuses références pour le calcul des caractères de  $G$  est [9].

Pour tout caractère  $\chi$  de  $G$ , nous désignons aussi par  $\chi$  l'extension par linéarité de  $\chi$  à  $\mathbb{C}[G]$  et nous nous proposons d'en calculer la restriction à la sous-algèbre  $A_\alpha$ . Pour l'unité  $e$  de  $A_\alpha$ , on obtient

$$\chi(e) = \chi(e_\theta) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \theta(h^{-1}) \chi(h) = \langle \theta, \text{Res}_H^G \chi \rangle = \langle \text{Ind}_H^G \theta, \chi \rangle$$

et d'une manière explicite :

$$\chi(e) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a,b} \bar{\alpha}(a) \bar{\psi}(b) \chi(c(a) u(b)), \quad a \in F^\times, b \in F^+;$$

or la suite des diviseurs élémentaires de  $c(a) u(b)$  est 1,  $(X-a)^2$ , si  $b \neq 0$ , et  $X-a$ ,  $X-a$ , si  $b = 0$ , pour  $a \in F^\times, b \in F^+$ , d'où :

$$\chi(e) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a,b \neq 0} \bar{\alpha}(a) \bar{\psi}(b) \chi(1, (X-a)^2) + \sum_a \bar{\alpha}(a) \chi(X-a, X-a)$$

$a, b \in F$ ; mais  $\psi$  étant un caractère non-trivial de  $F^+$ , on a

$$\sum_{b \neq 0} \psi(b) = -1, \quad b \in F, \quad \text{d'où}$$

$$\chi(e) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_a \bar{\alpha}(a) [\chi(X-a, X-a) - \chi(1, (X-a)^2)], \quad a \in F^\times.$$

En utilisant la table des caractères, on obtient, pour  $\mu, \nu \in X$ ,

$$\chi_\mu^1(e) = 0, \chi_\mu^q(e) = \delta(\alpha^{-1} \mu^2), \chi_{\mu, \nu}(e) = \delta(\alpha^{-1} \mu \nu)$$

et  $\chi_\Lambda(e) = \delta(\alpha^{-1} \lambda)$ , où  $\lambda$  dénote la restriction de  $\Lambda$  à  $F^\times$ , pour  $\Lambda \in Y$ .

D'après [2], Corollaire 1.2, les homomorphismes d'algèbres de  $A_\alpha$  dans  $\mathbb{C}$  sont donnés par les caractères  $\chi$  de  $G$ , tels que  $\chi(e) = 1$ . Nous calculons, dans la suite, leurs valeurs sur les générateurs  $b(\gamma)$  de  $A_\alpha$  avec  $\gamma \in X$ .

LEMME 1. Soit  $\chi$  un caractère de  $G$  et  $\gamma \in X$ ; on a

$$\begin{aligned} & \chi(b(\gamma)) \\ &= q^{-1}(q-1)^{-2} \gamma(-1) \sum_{\substack{a, c \in F^\times \\ b \in F^+}} (\alpha^{-1} \gamma^{-2})(a) \gamma(c) \bar{\psi}(a^{-1}b) \chi(1, X^2 - bX + c), \end{aligned}$$

ici  $\alpha$  dénote le caractère central fixé.

En effet, on a  $\chi(b(\gamma)) = (q-1)^{-1} \sum_a \gamma(a)\chi(a)$ ,  $a \in F^\times$ .

Or

$$\begin{aligned} b(a) &= ed(a)ze = q^{-2}(q-1)^{-2} \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} \alpha(a_1 a_2) \psi(b_1 + b_2) c(a_1) u(b_1) d(a) z c(a_2) u(b_2) \\ &= q^{-2}(q-1)^{-1} \sum_{a_1, b_1, b_2} \bar{\alpha}(a_1) \bar{\psi}(b_1 + b_2) c(a_1) u(b_1) d(a) z u(b_2), \quad a_1, a_2 \in F^\times, b_1, b_2 \in F^+ \end{aligned}$$

La suite des diviseurs élémentaires de  $c(a_1) u(b_1) d(a) z u(b_2)$  est égale à  $1, X^2 - a_1(b_1 + b_2)X - a_1^2 a$ , pour  $a_1, a \in F^\times, b_1, b_2 \in F^+$ , d'où

$$\begin{aligned} \chi(b(a)) &= q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a_1, b} \bar{\alpha}(a_1) \bar{\psi}(b) \chi(1, X^2 - a_1 b X - a_1^2 a), \quad a_1 \in F^\times, b \in F^+ \\ &= q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a_1, b} \bar{\alpha}(a_1) \bar{\psi}(a_1^{-1} b) \chi(1, X^2 - b X - a_1^2 a), \quad a_1 \in F^\times, b \in F^+ \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \chi(b(\gamma)) &= q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, b} \alpha(a_1^{-1}) \gamma(a) \bar{\psi}(a_1^{-1} b) \chi(1, X^2 - b X - a_1^2 a), \quad a, a_1 \in F^\times, b \in F^+ \\ &= q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a_1, c, b} \alpha(a_1^{-1}) \gamma(-a_1^{-2} c) \bar{\psi}(a_1^{-1} b) \chi(1, X^2 - b X + c) \\ &= q^{-1}(q-1)^{-2} \gamma(-1) \sum_{a, c, b} (\alpha^{-1} \gamma^{-2})(a) \gamma(c) \bar{\psi}(a^{-1} b) \chi(1, X^2 - b X + c), \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 1.

**PROPOSITION 2.** *Les valeurs des caractères de  $G$  sur les générateurs de  $A$  sont données par :*

$$\chi_\mu^1(e) = \chi_\mu^1(b(\gamma)) = 0,$$

$$\chi_\mu^q(e) = \delta(\alpha^{-1} \mu^2), \quad \chi_\mu^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha^{-1} \mu^2) \gamma(-1) g(\gamma \mu)^2,$$

$$\chi_{\mu, \nu}(e) = \delta(\alpha^{-1} \mu \nu), \quad \chi_{\mu, \nu}(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha^{-1} \mu \nu) (\alpha \gamma) (-1) g(\gamma \mu) g(\gamma \nu),$$

$$\chi_\Lambda(e) = \delta(\alpha^{-1} \lambda), \quad \chi_\Lambda(b(\gamma)) = -q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha^{-1} \lambda) (\alpha \gamma) (-1) G(\gamma^* \Lambda);$$

ici  $\mu, \nu, \gamma \in X$ ,  $\alpha$  caractère central fixé,  $\Lambda \in Y$ ;  $\lambda$  dénote la restriction de  $\Lambda$  à  $F^\times$  et  $\gamma^*$  dénote le composé de  $\gamma$  avec la norme de  $E^\times$  sur  $F^\times$ ; la somme de Gauss  $G(\Lambda \gamma^*)$  est définie par

$$G(\Lambda \gamma^*) = \sum_{x \in E^\times} (\Lambda \gamma^*)(x) \psi(\text{Tr}(x)).$$

*Démonstration.* Les valeurs sur l'unité  $e$  ont déjà été calculées au début du paragraphe. De  $\chi_\mu^1(1, X^2 - bX + c) = \mu(c)$ , pour tout  $b \in F^+, c \in F^\times$ ,  $\mu \in X$  on déduit que  $\chi_\mu^1(b(\gamma)) = 0$ , pour tout  $\gamma \in X$ .

D'après le lemme 1, on obtient

$$\chi_{\mu}^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2} \gamma(-1) \sum_{a,c,b} (\alpha^{-1} \gamma^{-2})(a) \gamma(c) \bar{\psi}(a^{-1}b) \chi_{\mu}^q(1, X^2 - bX + c);$$

d'après la table des caractères, on a

$$\chi_{\mu}^q(1, X^2 - bX + c) = \begin{cases} 0 & \\ \mu(a_1 a_2) & \text{si } X^2 - bX + c \\ -\mu(N(x)) & \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (X-a)^2 & \text{avec } a \in F^{\times} \\ (X-a_1(X-a_2)) & \text{avec } a_1, a_2 \in F^{\times}, a_1 \neq a_2 \\ (X-x)(X-x^q) & \text{avec } x \in E^{\times} - F^{\times} \end{cases}$$

d'où

$$\chi_{\mu}^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2} \gamma(-1) \frac{1}{2} \sum_{\substack{a \\ a_1 \neq a_2}} (\alpha^{-1} \gamma^{-2}(a)) \gamma(a_1 a_2) \bar{\psi}(a^{-1}(a_1 + a_2)) \mu(a_1 a_2) \\ - q^{-1}(q-1)^{-2} \gamma(-1) \frac{1}{2} \sum_{\substack{a \\ x \neq x^q}} (\alpha^{-1} \gamma^{-2})(a) \gamma(N(x)) \bar{\psi}(a^{-1} \text{Tr}(x)) \mu(N(x)),$$

ici l'on somme sur  $a, a_1, a_2 \in F^{\times}$  et  $x \in E^{\times}$ . On ne change rien à la valeur de  $\chi_{\mu}^q(b(\gamma))$  si dans les sommations on enlève la restriction  $a_1 \neq a_2$  et  $x \neq x^q$ . Après un changement d'indices de sommation, l'on obtient

$$\chi_{\mu}^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2} \gamma(-1) \frac{1}{2} \left( \sum_{a, a_1, a_2} (\alpha^{-1} \mu^2)(a) \gamma(a_1 a_2) \psi(a_1 + a_2) \mu(a_1 a_2) \right. \\ \left. - \sum_{a, x} (\alpha^{-1} \mu^2)(a) \gamma(N(x)) \psi(\text{Tr}(x)) \mu(N(x)) \right), a, a_1, a_2 \in F^{\times}, x \in E^{\times}, \\ = q^{-1}(q-1)^{-1} \gamma(-1) \delta(\alpha^{-1} \mu^2) \frac{1}{2} [g(\gamma\mu)^2 - G((\gamma\mu)^*)],$$

où  $G((\gamma\mu)^*) = \sum_{x \in E^{\times}} (\gamma\mu)(N(x)) \psi(\text{Tr}(x))$ . D'après le théorème de Davenport et Hasse [3], on a  $G((\gamma\mu)^*) = -g(\gamma\mu)^2$ , d'où

$$\chi_{\mu}^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-1} \gamma(-1) \delta(\alpha^{-1} \mu^2) g(\gamma\mu)^2.$$

Le calcul de  $\chi_{\mu, \nu}(b(\gamma))$  est plus facile, on obtient, d'après le lemme 1 et la table des caractères

$$\begin{aligned}
\chi_{\mu, \nu}(b(\gamma)) &= q^{-1}(q-1)^{-2} \gamma(-1) \sum_{a, a_1, a_2} (\alpha^{-1} \gamma^{-2})(a) \gamma(a_1 a_2) \bar{\psi}(a^{-1}(a_1 + a_2)) \mu(a_1) \nu(a_2) \\
&\quad a, a_1, a_2 \in F^\times, \\
&= q^{-1}(q-1)^{-2} (\gamma \mu \nu) (-1) \sum_{a, c_1, c_2} (\alpha^{-1} \mu \nu)(a) (\gamma \mu)(c_1) (\gamma \nu)(c_2) \psi(c_1 + c_2), \\
&\quad a, c_1, c_2 \in F^\times, \\
&= q^{-1}(q-1)^{-1} (\alpha \gamma) (-1) \delta(\alpha^{-1} \mu \nu) g(\gamma \mu) g(\gamma \nu);
\end{aligned}$$

le calcul de  $\chi_\Lambda(b(\gamma))$  est analogue et est laissé au lecteur. La démonstration de la proposition 2 est ainsi terminée.

*Remarque 1.* Soit  $\chi$  un caractère de  $G$  tel que  $\chi(e) = 1$ . Un tel caractère définit un homomorphisme d'algèbres de  $A_\alpha$  dans  $\mathbf{C}$ , comme on l'a déjà remarqué, c.f. [2]. On a donc

$$\chi(b(\gamma_1)) \chi(b(\gamma_2)) = \chi(b(\gamma_1) b(\gamma_2)),$$

pour  $\gamma_1, \gamma_2 \in X$ , et la relation (5) du théorème 1 donne ainsi lieu à l'identité suivante:

$$\begin{aligned}
(5)^x \quad \chi(b(\gamma_1)) \chi(b(\gamma_2)) &= q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha \gamma_1 \gamma_2) \\
&+ q^{-1}(q-1)^{-2} (\alpha \gamma_1 \gamma_2) (-1) g(\alpha \gamma_1 \gamma_2) \sum_{\gamma} \gamma(-1) g(\gamma_1 \gamma^{-1}) g(\gamma_2 \gamma^{-1}) \chi(b(\gamma))
\end{aligned}$$

pour  $\gamma_1, \gamma_2 \in X$ , sommation sur  $\gamma \in X$ .

*Remarque 2.* En spécialisant la remarque 1, pour  $\chi = \chi_\mu^q$  (resp.  $\chi = \chi_{\mu, \nu}$ , resp.  $\chi = \chi_\Lambda$ ) avec  $\mu \in X$  tel que  $\mu^2 = \alpha$  (resp. avec  $\mu, \nu \in X$  tels que  $\mu \neq \nu$  et  $\mu\nu = \alpha$ , resp. avec  $\Lambda \in Y$  tel que  $\Lambda \neq \Lambda^q$  et  $\lambda = \alpha$ ) et en appliquant la proposition 2, on obtient les identités suivantes:

$$\begin{aligned}
(5)_\mu^q \quad g(\gamma_1 \mu)^2 g(\gamma_2 \mu)^2 &= q(q-1) \delta(\gamma_1 \gamma_2 \mu^2) \\
&+ (q-1)^{-1} g(\gamma_1 \gamma_2 \mu^2) \sum_{\gamma} g(\gamma_1 \gamma^{-1}) g(\gamma_2 \gamma^{-1}) g(\mu \gamma)^2, \dots
\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}
(5)_{\mu, \nu} \quad g(\gamma_1 \mu) g(\gamma_1 \nu) g(\gamma_2 \mu) g(\gamma_2 \nu) &= q(q-1) \delta(\gamma_1 \gamma_2 \mu \nu) (\mu \nu) (-1) \\
&+ (q-1)^{-1} g(\gamma_1 \gamma_2 \mu \nu) \sum_{\gamma} g(\gamma_1 \gamma^{-1}) g(\gamma_2 \gamma^{-1}) g(\mu \gamma) g(\nu \gamma),
\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}
(5)_\Lambda \quad G(\gamma_1^* \Lambda) G(\gamma_2^* \Lambda) &= q(q-1) \delta(\gamma_1 \gamma_2 \lambda) \lambda (-1) \\
&- (q-1)^{-1} g(\gamma_1 \gamma_2 \lambda) \sum_{\gamma} g(\gamma_1 \gamma^{-1}) g(\gamma_2 \gamma^{-1}) G(\gamma^* \Lambda),
\end{aligned}$$

pour  $\gamma_1, \gamma_2 \in X$ , sommation sur  $\gamma \in X$ .

*Remarque 3.* On observe que les identités  $(5)_{\mu, \nu}$  [resp.  $(5)_{\Lambda}$ ] considérées pour tous les  $\mu, \nu \in X$  [resp.  $\Lambda \in Y$ ] contiennent l'identité  $(5)_{\mu}^q$  comme cas particulier « dégénéré », correspondant à  $\mu = \nu$  [resp.  $\Lambda = \Lambda^q, \Lambda = \mu \circ N$ ].

*Remarque 4.* Pour tout  $\beta \in X$ , on a  $\delta(\beta) g(\beta) = -1$ . Les identités peuvent donc s'énoncer sous la forme suivante :

$$(5)_{\mu, \nu} \quad (q-1)^{-1} \sum_{\gamma} g(\gamma_1 \gamma^{-1}) g(\gamma_2 \gamma^{-1}) g(\mu \gamma) g(\nu \gamma) \\ = \frac{g(\gamma_1 \mu) g(\gamma_1 \nu) g(\gamma_2 \mu) g(\gamma_2 \nu)}{g(\gamma_1 \gamma_2 \mu \nu)} + q(q-1) \delta(\gamma_1 \gamma_2 \mu \nu) (\mu \nu) (-1),$$

pour tous  $\gamma_1, \gamma_2, \mu, \nu \in X$ , sommation sur  $\gamma \in X$ , et

$$(5)_{\Lambda} \quad - (q-1)^{-1} \sum_{\gamma} g(\gamma_1 \gamma^{-1}) g(\gamma_2 \gamma^{-1}) G(\gamma^* \Lambda) \\ = \frac{G(\gamma_1^* \Lambda) G(\gamma_2^* \Lambda)}{g(\gamma_1 \gamma_2 \lambda)} + q(q-1) \delta(\gamma_1 \gamma_2 \lambda) \lambda(-1),$$

pour tous  $\gamma_1, \gamma_2 \in X, \Lambda \in Y$ , sommation sur  $\gamma \in X$ ,  $\lambda$  dénote la restriction de  $\Lambda$  à  $F^{\times}$ .

Nous reconnaissons ainsi les identités (i) et (iv) du théorème 1 de notre publication [4], dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous, et nous voyons bien comment la série principale (resp. discrète) de caractères  $\chi_{\mu, \nu}$  (resp.  $\chi_{\Lambda}$ ) amène aux identités de Barnes (i) (resp. (iv)). Ceci termine la première partie de cet article.

**RAPPEL DU THÉORÈME 1 DE [4].** Soit  $F$  (resp.  $F_2$ , resp.  $F_4$ ) le corps fini à  $q$  (resp.  $q^2$ , resp.  $q^4$ ) éléments; on note  $F_2^{\times}$  (resp.  $F_4^{\times}$ ) le groupe multiplicatif de  $F_2$  (resp.  $F_4$ ), et on se fixe un caractère non-trivial  $\exp$  du groupe additif  $F^+$ . Pour un caractère  $\alpha$  de  $F^{\times}$ , on pose

$$G_1(\alpha) = g(\alpha) = \sum_a \alpha(a) \exp(a),$$

où l'on somme sur tous les  $a \in F^{\times}$ . On note  $\text{Tr}_2$  (resp.  $\text{Tr}_4$ ) la trace de  $F_2$  (resp.  $F_4$ ) sur  $F$ , et l'on note  $N$  (resp.  $N_{4/2}$ ) la norme de  $F_2$  sur  $F$  (resp.  $F_4$  sur  $F_2$ ). Pour un caractère  $\Lambda$  de  $F_2^{\times}$ , on note  $G_2(\Lambda)$  la somme de Gauss suivante

$$G_2(\Lambda) = \sum_x \Lambda(x) \exp(\text{Tr}_2(x)),$$

où l'on somme sur tous les  $x \in F_2^\times$ . De manière analogue, pour un caractère  $\Phi$  de  $F_4^\times$ , on pose

$$G_4(\Phi) = \sum_z \Phi(z) \exp(\text{Tr}_4(z)),$$

où l'on somme sur tous les  $z \in F_4^\times$ . On a les cinq identités suivantes:

(i) Pour quatre caractères  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  de  $F^\times$ , on a

$$\begin{aligned} & (q-1)^{-1} \sum_{\alpha} g(\alpha_1 \alpha) g(\alpha_2 \alpha^{-1}) g(\alpha_3 \alpha) g(\alpha_4 \alpha^{-1}) \\ &= \frac{g(\alpha_1 \alpha_2) g(\alpha_2 \alpha_3) g(\alpha_3 \alpha_4) g(\alpha_4 \alpha_1)}{g(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)} + q(q-1) \delta(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) (\alpha_1 \alpha_3) (-1), \end{aligned}$$

ici l'on somme sur les caractères  $\alpha$  de  $F^\times$ ;

(ii) pour un caractère  $\Phi$  de  $F_4^\times$ , on a

$$- (q+1)^{-1} \sum_{\Lambda} G_4(\Phi(\Lambda \circ N_{4/2})) = \frac{G_4(\Phi^{q+1})}{g(\varphi)} + q(q-1) \delta(\varphi) \Phi(\varepsilon_0),$$

ici l'on somme sur les caractères  $\Lambda$  de  $F_2^\times$  dont la restriction à  $F^\times$  soit triviale,  $\varepsilon_0$  dénote un élément de  $F_2$  tel que  $\varepsilon_0^{q-1} = -1$ ;  $\varphi$  dénote la restriction de  $\Phi$  à  $F^\times$ ;

(iii) pour  $\Lambda_1, \Lambda_2$  caractères de  $F_2^\times$ , on a

$$\begin{aligned} & (q-1)^{-1} \sum_{\alpha} G_2(\Lambda_1(\alpha \circ N)) G_2(\Lambda_2(\alpha \circ N)^{-1}) \\ &= \frac{G_2(\Lambda_1 \Lambda_2) G_2(\Lambda_1 \Lambda_2^q)}{g(\lambda_1 \lambda_2)} + q(q-1) \delta(\lambda_1 \lambda_2) \lambda_1 (-1), \end{aligned}$$

ici  $\lambda_1$  (resp.  $\lambda_2$ ) désigne la restriction de  $\Lambda_1$  (resp.  $\Lambda_2$ ) à  $F^\times$ , l'on somme sur tous les caractères  $\alpha$  de  $F^\times$ ;

(iv) pour  $\alpha_1, \alpha_2$  caractères de  $F^\times$ ,  $\Lambda$  caractère de  $F_2^\times$ , on a

$$\begin{aligned} & - (q-1)^{-1} \sum_{\alpha} g(\alpha_1 \alpha) g(\alpha_2 \alpha) G_2(\Lambda(\alpha \circ N)^{-1}) \\ &= \frac{G_2(\Lambda(\alpha_1 \circ N)) G_2(\Lambda(\alpha_2 \circ N))}{g(\alpha_1 \alpha_2 \lambda)} + q(q-1) \delta(\alpha_1 \alpha_2 \lambda) \lambda (-1), \end{aligned}$$

ici  $\lambda$  désigne la restriction de  $\Lambda$  à  $F^\times$ , l'on somme sur tous les caractères  $\alpha$  de  $F^\times$ ;

(v) pour  $\Lambda_1, \Lambda_2$  caractères de  $F_2^\times$ , on a

$$(q+1)^{-1} \sum_{\Lambda} G_2(\Lambda_1 \Lambda) G_2(\Lambda_2 \Lambda) \\ = \frac{g(\lambda_1) g(\lambda_2) G_2(\Lambda_1 \Lambda_2)}{g(\lambda_1 \lambda_2)} + q(q-1) \delta(\lambda_1 \lambda_2) \lambda_1(-1) (\Lambda_1 \Lambda_2) (\varepsilon_0),$$

ici  $\lambda_1$  (resp.  $\lambda_2$ ) dénote la restriction de  $\Lambda_1$  (resp.  $\Lambda_2$ ) à  $F^\times$ , l'on somme sur les caractères  $\Lambda$  de  $F_2^\times$  dont la restriction à  $F^\times$  soit triviale,  $\varepsilon_0$  désigne un élément de  $F_2^\times$  tel que  $\varepsilon_0^{q-1} = -1$ .

Les cinq identités sont des cas particuliers d'une identité plus générale qui fait l'objet du théorème 2 de notre publication [4]. La démonstration se base sur l'étude de certaines algèbres commutatives de degré 4 sur  $F$  et fait intervenir le groupe symétrique des permutations de quatre éléments ainsi que le groupe diédral  $D_4$  du carré. L'identité générale s'énonce pour chaque  $\sigma \in D_4$ , mais elle ne dépend que de la classe de conjugaison de  $\sigma$ . Les cinq classes de conjugaison de  $D_4$  fournissent les cinq identités de Barnes.

Dans la suite de cet article nous calculons la trace de l'algèbre  $A_\alpha$  (§ 5) et nous utilisons les identités de Barnes (i) et (iv) pour exhiber les homomorphismes d'algèbres de  $A_\alpha$  dans  $\mathbf{C}$  indépendamment de la table des caractères (§ 6). La comparaison de leur somme avec la trace montre que la liste des homomorphismes est complète et sans répétitions.

### § 5. CALCUL DE LA TRACE DE L'ALGÈBRE $A_\alpha$

On note  $T_\alpha$  la trace de l'algèbre  $A_\alpha$ ,  $\alpha \in X$  fixé. Soit  $B$  la base de  $A_\alpha$  formée par l'unité et les  $b(\gamma)$ , avec  $\gamma \in X$ ; pour  $b \in B$  et  $a \in A_\alpha$ , on définit le coefficient  $\langle b' | a \rangle$  dans  $\mathbf{C}$  par la condition suivante:

$$a = \sum_{b \in B} \langle b' | a \rangle b;$$

on a, pour tout  $a \in A_\alpha$ ,

$$T_\alpha(a) = \sum_{b \in B} \langle b' | ab \rangle.$$

On obtient

$$T_\alpha(1) = \dim_{\mathbf{C}}(A_\alpha) = q$$



et

$$T_\alpha(b(\gamma_1)) = \sum_{\gamma_2} \langle b(\gamma_2)' | b(\gamma_1) b(\gamma_2) \rangle$$

puisque  $\langle 1' | b(\gamma) \rangle = 0$ , pour tout  $\gamma \in X$ . D'après (5), l'on calcule

$$\begin{aligned} \langle b(\gamma_2)' | b(\gamma_1) b(\gamma_2) \rangle &= q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1) (-1) g(\alpha\gamma_1\gamma_2) g(\gamma_1\gamma_2^{-1}) g(\gamma_2\gamma_2^{-1}) \\ &= -q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1) (-1) g(\alpha\gamma_1\gamma_2) g(\gamma_1\gamma_2^{-1}), \end{aligned}$$

pour  $\gamma_1, \gamma_2 \in X$ , d'où

$$T_\alpha(b(\gamma_1)) = -q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1) (-1) \sum_{\gamma_2} g(\alpha\gamma_1\gamma_2) g(\gamma_1\gamma_2^{-1}),$$

ici l'on somme sur  $\gamma_2 \in X$  et  $\gamma_1$  est dans  $X$ . On a donc le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** *La trace  $T_\alpha$  de l'algèbre  $A_\alpha$  prend les valeurs suivantes sur les générateurs:  $T_\alpha(1) = q$  et*

$$(6) \quad T_\alpha(b(\gamma)) = -q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma) (-1) \sum_{\beta_1 \beta_2 = \alpha\gamma^2} g(\beta_1) g(\beta_2),$$

ici  $\gamma, \beta_1$  et  $\beta_2$  désignent des éléments de  $X$ .

**LEMME 2.** *Pour  $\beta \in X$ , on a*

$$(7) \quad (q-1)^{-1} \sum_{\beta_1 \beta_2 = \beta} g(\beta_1) g(\beta_2) = \sum_a e(2a) \beta(a),$$

avec  $\beta_1, \beta_2 \in X$  et  $a \in F^\times$ .

C'est un cas particulier du lemme 5, (b) qu'on démontrera au § 5. Plus explicitement, on obtient

$$(q-1)^{-1} \sum_{\beta_1 \beta_2 = \beta} g(\beta_1) g(\beta_2) = \begin{cases} (q-1) \delta(\beta), & \text{si } 2 = 0 \text{ dans } F, \\ \beta \left( \frac{1}{2} \right) g(\beta), & \text{sinon.} \end{cases}$$

**COROLLAIRE 1.** *On a explicitement*

$$(8) \quad T_\alpha(b(\gamma)) = \begin{cases} -q^{-1} \gamma(-1) \delta(\alpha\gamma^2), & \text{si la caractéristique de } F \text{ est } 2, \\ -q^{-1} (q-1)^{-1}(\alpha\gamma) (-1) (\alpha^{-1}\gamma^{-2}) (2) g(\alpha\gamma^2), & \text{sinon.} \end{cases}$$

§ 6. HOMOMORPHISMES D'ALGÈBRES DE  $A$  DANS  $C$ 

On pose  $H_1 := F \times F$  et  $H_2 := F_{q^2}$ . On note  $H_i^\times$  le groupe multiplicatif de l'algèbre  $H_i$ , pour  $i = 1, 2$ , et l'on pose  $\varepsilon_1 = 1$  et  $\varepsilon_2 = -1$ , c'est-à-dire qu'on associe le signe  $\varepsilon_i$  à l'algèbre  $H_i$ . Pour  $x \in H_1$ ,  $x = (x_1, x_2)$  avec  $x_1, x_2 \in F_q$ , on pose  $\bar{x} := (x_2, x_1)$ ; pour  $x \in H_2$ , on pose  $\bar{x} := x^q$ ; on associe ainsi à chaque  $x \in H_i$  le conjugué  $\bar{x}$  de  $x$ , pour  $i = 1, 2$ . On définit la norme  $N$  (resp. la trace  $T$ ) de  $H_i$  sur  $F_q$  par  $Nx := x \bar{x}$  (resp.  $Tx := x + \bar{x}$ ), pour  $i = 1, 2$ . Pour un caractère multiplicatif  $\beta$  de  $F$ , le composé de  $\beta$  avec la norme de  $H_i$  sur  $F$  définit un caractère  $\beta^*$  du groupe multiplicatif  $H_i^\times$ , pour  $i = 1, 2$ . On plonge  $F$  dans  $H_1$  en appliquant  $a \in F$  sur  $(a, a) \in H_1$ , on plonge  $F$  dans  $H_2$  en tant que seul sous-corps à  $q$  éléments; pour un caractère  $\phi$  de  $H_i^\times$ , on note  $\phi_*$  la restriction de  $\phi$  à  $F_q^\times$ , pour  $i = 1, 2$ . On définit la somme de Gauss d'un caractère  $\phi$  du groupe multiplicatif  $H_i^\times$  par

$$G(\phi) := \sum_x \psi(T(x)) \phi(x) \quad \text{avec} \quad x \in H_i^\times, i = 1, 2.$$

PROPOSITION 3. Soient  $i = 1, 2$  et  $\phi$  un caractère de  $H_i^\times$  tel que  $\phi_* = \alpha$ . Il existe alors un homomorphisme de  $C$ -algèbres  $\hat{\phi}$  de  $A_\alpha$  dans  $C$  tel que

$$(9) \quad \hat{\phi}(b(\gamma)) = \varepsilon_i q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma) (-1) G(\gamma^*\phi),$$

pour tout  $\gamma \in X$ .

La preuve de l'existence d'un tel homomorphisme consiste en la vérification de la relation :

$$\hat{\phi}(b(\gamma_1)) \hat{\phi}(b(\gamma_2)) = \hat{\phi}(b(\gamma_1)b(\gamma_2)),$$

pour tous  $\gamma_1, \gamma_2 \in X$ . D'après (5) ceci équivaut à l'identité suivante :

$$q^{-2}(q-1)^{-2}(\gamma_1\gamma_2) (-1) G(\gamma_1^*\phi) G(\gamma_2^*\phi) = q^{-1}(q-1)^{-1} \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \\ + \varepsilon_i q^{-2}(q-1)^{-3}(\gamma_1\gamma_2) (-1) g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_{\gamma} g(\gamma_1\gamma^{-1}) g(\gamma_2\gamma^{-1}) G(\gamma^*\phi),$$

pour  $\gamma_1, \gamma_2 \in X$ ;

cette identité est équivalente à

$$\frac{G(\gamma_1^*\phi) G(\gamma_2^*\phi)}{g(\alpha\gamma_1\gamma_2)} + q(q-1) \delta(\alpha\gamma_1\gamma_2) \alpha(-1) \\ = \varepsilon_i(q-1)^{-1} \sum_{\gamma} g(\gamma_1\gamma^{-1}) g(\gamma_2\gamma^{-1}) G(\gamma^*\phi), \quad \text{pour} \quad \gamma_1, \gamma_2 \in X;$$

l'on somme sur  $\gamma \in X$ .

Cette dernière est un cas particulier du théorème 1 de [5], le cas de  $H_1 = F \times F$  correspond à l'identité (i) et le cas de  $H_2 = F_{q^2}$  correspond à l'identité (iv) du théorème 2 de [5]. Une démonstration détaillée est indiquée en [4].

La démonstration de la proposition (3) est ainsi achevée.

Nous nous proposons maintenant de démontrer que tout homomorphisme d'algèbres de  $A_\alpha$  dans  $C$  est de la forme  $\hat{\phi}$  avec un caractère multiplicatif  $\phi$  de  $H_i$ ,  $i = 1$  ou  $2$ .

LEMME 3. Soient  $m \geq 0$  un entier et  $R$  la  $C$ -algèbre  $C^m$ . Pour  $1 \leq i \leq m$ , soit  $p_i$  la projection de  $R$  sur  $C$  donnée par  $p_i(x) := x_i$ , pour  $x \in R$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m)$ . On a les propriétés suivantes :

- (a) Chaque  $p_i$  est un homomorphisme de  $C$ -algèbres, pour  $1 \leq i \leq m$ .
- (b) Tout homomorphisme de  $C$ -algèbres de  $R$  dans  $C$  est un des  $p_i$  avec  $1 \leq i \leq m$ .
- (c) La somme des  $p_i$  est égale à la trace  $\text{Tr}$  de  $R$  sur  $C$ , c'est-à-dire que  $p_1 + \dots + p_m = \text{Tr}$ .
- (d) Si  $H = (h_j)_{j \in J}$  est une famille d'homomorphismes de  $C$ -algèbres  $h_j: R \rightarrow C$  telle que  $\sum_{j \in J} h_j = n \text{Tr}$ , alors  $H$  contient tout homomorphisme d'algèbres de  $R$  dans  $C$  exactement  $n$  fois, pour  $n > 0$  entier.

Seul le point (d) nécessite une vérification. D'après (b), on sait que chaque  $h_j (j \in J)$  est un des projecteurs  $p_i (1 \leq i \leq m)$ . Pour tout  $1 \leq i \leq m$ , soit  $n_i$  le nombre de fois où la projection  $p_i$  intervient dans la famille  $H$  et soit  $e_i$  l'élément de  $R$  tel que  $p_i(e_i) = 1$  et  $p_k(e_i) = 0$  pour tout  $k \neq i$  avec  $1 \leq k \leq m$ . On trouve

$$n_i = \sum_{k=1}^m n_k p_k(e_i) = \sum_{j \in J} h_j(e_i) = n \text{Tr}(e_i) = n,$$

pour tout  $1 \leq i \leq m$ . La famille  $H$  contient donc tout homomorphisme de  $C$ -algèbres de  $R$  dans  $C$  exactement  $n$  fois. C.Q.F.D.

LEMME 4 (Poisson). Soit  $H$  un groupe abélien fini et soit  $H'$  un sous-groupe de  $H$ . Etant donné un caractère  $\chi$  de  $H'$ , on note  $C(\chi)$  l'ensemble des caractères  $\psi$  de  $H$  tels que la restriction de  $\psi$  à  $H'$  soit égale à  $\chi$ . On a alors, pour tout  $x \in H$ ,

$$(\text{card } C(\chi))^{-1} \sum_{\psi \in C(\chi)} \psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin H', \\ \chi(x), & \text{si } x \in H'. \end{cases}$$

La preuve du lemme de Poisson est classique; nous l'appliquons maintenant au groupe multiplicatif  $H_i^\times$  de l'algèbre  $H_i$  pour  $i = 1, 2$ . Soit toujours  $\alpha$  un caractère fixé de  $F^\times$ ; notons  $C_i(\alpha)$  l'ensemble des caractères  $\phi$  de  $H_i^\times$  tels que la restriction  $\phi_*$  de  $\phi$  à  $F_q^\times$  soit égale à  $\alpha$ . On obtient:

LEMME 5. On a, pour  $i = 1, 2$ ,

(a)  $\text{card } C_i(\alpha) = q - \varepsilon_i$ ,

(b)  $(\text{card } C_i(\alpha))^{-1} \sum_{\phi \in C_i(\alpha)} G(\phi) = \sum_a e(2a) \alpha(a), \quad a \in F_q^\times$ .

En effet, on a  $\text{card } C_i(\alpha) = (\text{card } F^\times)^{-1} \text{card } H_i^\times$  et donc  $\text{card } C_1(\alpha) = q - 1$  et  $\text{card } C_2(\alpha) = q + 1$ , d'où l'assertion (a).

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} (\text{card } C_i(\alpha))^{-1} \sum_{\phi \in C_i(\alpha)} G(\phi) &= (\text{card } C_i(\alpha))^{-1} \sum_{x \in H_i^\times} \psi(Tx) \sum_{\phi \in C_i(\alpha)} \phi(x) \\ &= \sum_a \psi(2a) \alpha(a), \quad a \in F_q^\times, \end{aligned}$$

d'après le lemme 4, d'où (b).

PROPOSITION 4. La somme des homomorphismes  $\hat{\phi}: A_\alpha \rightarrow \mathbf{C}$  avec  $\phi \in C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)$  est égale à  $2 T_\alpha$  (deux fois la trace de  $A_\alpha$ ).

En effet, on remarque tout d'abord qu'on a bien

$$\sum_{\phi \in C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)} \hat{\phi}(1) = \text{card } C_1(\alpha) + \text{card } C_2(\alpha) = 2q = 2 T_\alpha(1).$$

Soit maintenant  $\gamma \in X$ ; on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\phi \in C_i(\alpha)} \hat{\phi}(b(\gamma)) &= \varepsilon_i q^{-1} (q-1)^{-1} (\alpha\gamma) (-1) \sum_{\phi \in C_i(\alpha)} G(\gamma^* \phi) \\ &= \varepsilon_i q^{-1} (q-1)^{-1} (\alpha\gamma) (-1) \sum_{\psi \in C_i(\alpha\gamma^2)} G(\psi) \\ &= \varepsilon_i q^{-1} (q-1)^{-1} (q - \varepsilon_i) (\alpha\gamma) (-1) \sum_a e(2a) (\alpha\gamma^2)(a), \quad a \in F_q^\times; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{\phi \in C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)} \hat{\phi}(b(\gamma)) &= -2q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma) (-1) \sum_a e(2a) (\alpha\gamma^2) (a), \quad a \in F_q^\times, \\ &= 2 T_\alpha(b(\gamma)), \end{aligned}$$

d'après (6) et (7) (théorème 2 et lemme 2).

C.Q.F.D.

Pour tout caractère  $\phi$  de  $H_i^\times$ , on définit le caractère conjugué  $\bar{\phi}$  de  $H_i$  par  $\bar{\phi}(x) := \phi(\bar{x})$ , pour tout  $x \in H_i^\times$ ,  $i = 1, 2$ .

Soit  $\phi$  un caractère multiplicatif de  $H_i$ ,  $i = 1, 2$ : on remarque que  $\phi = \bar{\phi}$  si et seulement s'il existe  $\beta \in X$ , tel que  $\beta^* = \phi$ .

Pour tout  $\phi \in C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)$ , on a  $\hat{\phi} = \widehat{\bar{\phi}}$ , puisque  $G(\gamma^*\phi) = G(\gamma^*\bar{\phi})$ , pour tout  $\gamma \in X$ .

D'autre part, soit  $\beta \in X$  et soit  $\phi_i$  le composé de  $\beta$  avec la norme de  $H_i^\times$  sur  $F^\times$ , pour  $i = 1, 2$ . On a alors  $\phi_i \in C_i(\beta^2)$  et

$$\varepsilon_1 G(\gamma^*\phi_1) = \varepsilon_2 G(\gamma^*\phi_2),$$

pour tout  $\gamma \in X$ ; ici l'on applique le théorème de Hasse et Davenport, c.f. [3], qui dit, dans ce cas:

$$G(\gamma^*\phi_2) = -g(\gamma\beta)^2.$$

Il s'ensuit que les homomorphismes  $\hat{\phi}_1$  et  $\hat{\phi}_2$  sont égaux.

Vu le lemme 3, (d) et la proposition 4, il s'ensuit maintenant le théorème suivant:

**THÉORÈME 3.** *Tout homomorphisme de C-algèbres de  $A_\alpha$  dans  $\mathbb{C}$  est de la forme  $\hat{\phi}$  avec  $\phi$  dans  $C_1(\alpha) \cup C_2(\alpha)$ . Pour  $i = 1, 2$  et  $\phi, \psi \in C_i(\alpha)$ , on a  $\hat{\phi} = \hat{\psi}$  si et seulement si  $\phi = \psi$  ou  $\phi = \bar{\psi}$ . Pour  $\phi_1 \in C_1(\alpha)$  et  $\phi_2 \in C_2(\alpha)$ , on a  $\hat{\phi}_1 = \hat{\phi}_2$  si et seulement s'il existe un caractère  $\beta$  de  $F^\times$  tel que  $\phi_1$  (resp.  $\phi_2$ ) soit le composé de  $\beta$  avec la norme de  $F \times F$  (resp.  $F_{q^2}$ ) sur  $F$ .*

#### RÉFÉRENCES

- [1] CHANG, B. Decomposition of Gelfand-Graev characters of  $GL_3(q)$ . *Commun. Algebra* 4 (1976), 375-401.
- [2] CURTIS, C. W. and T. V. FOSSUM. On Centralizer Rings and Characters of Representations of Finite Groups. *Math. Zeitschr.* 107 (1968), 402-406.
- [3] DAVENPORT, H. und H. HASSE. Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktion in gewissen zyklischen Fällen. *J. Reine u. Angew. Math.* 172 (1935), 151-182.

- [4] HELVERSEN-PASOTTO, A. L'identité de Barnes pour les corps finis. *Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU (théorie des nombres)*, 19<sup>e</sup> année, 1977/1978, N° 22, 12 p.
- [5] — L'identité de Barnes pour les corps finis. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 286 (1978), Série A, 297-300.
- [6] — Darstellungen von  $GL(3, F_q)$  und Gaussche Summen. *Math. Ann.* 260 (1982), 1-21.
- [7] LI, W. and J. SOTO ANDRADE. Barnes Identities and Representations of  $GL(2)$ , Part. I: Finite Field Case. *J. reine angew. Math.* 344 (1983), 171-179.
- [8] LI, W. Barnes Identities and Representations of  $GL(2)$ , Part II: Nonarchimedean Local Field Case. *J. reine angew. Math.* 345 (1983), 69-92.
- [9] STEINBERG, R. *Lectures on Chevalley Groups*. Yale Lecture Notes (1967).
- [10] — The Representations of  $GL(3, q)$ ,  $GL(4, q)$ ,  $PGL(3, q)$  and  $PGL(4, q)$ . *Canadian Journal of Mathematics* 3 (1951), 225-235.
- [11] YOKONUMA, T. Complément au mémoire « Sur le commutant d'une représentation d'un groupe de Chevalley fini ». *Journ. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sec. I, Vol. XVI, Part 1* (1969), 147-148.

(Reçu le 7 décembre 1984)

Anna Helversen-Pasotto

Département de Mathématiques  
Parc Valrose  
06034 Nice Cedex (France)

**Vide-leer-empty**